EQUILIBRI E ISOCLINE

Definizione

Un equilibrio è uno stato $\bar{x}$ tale che $x(0)=\bar{x}$ implica $x(t)=\bar{x}\ \ \forall t \geq 0$.

Nei sistemi a tempo continuo $\dot{x}(t)=f(x(t))$:

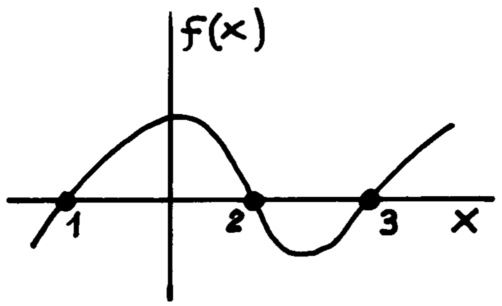
$$\bar{x} \text{ è equilibrio} \Leftrightarrow f(\bar{x})=0$$

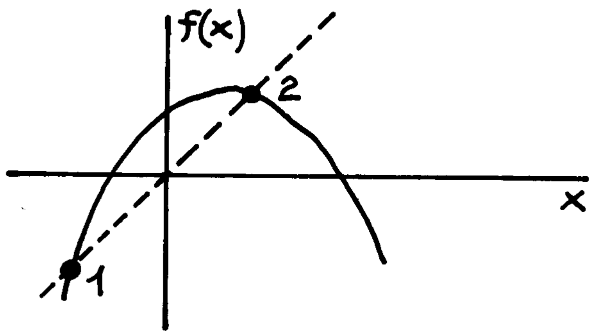
Nei sistemi a tempo discreto $x(t+1)=f(x(t))$:

$$\bar{x} \text{ è equilibrio} \Leftrightarrow f(\bar{x})=\bar{x}$$

Nota Bene: $f(\bar{x})=0$ [$f(\bar{x})=\bar{x}$] è un sistema di n equazioni nelle n incognite $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n$.

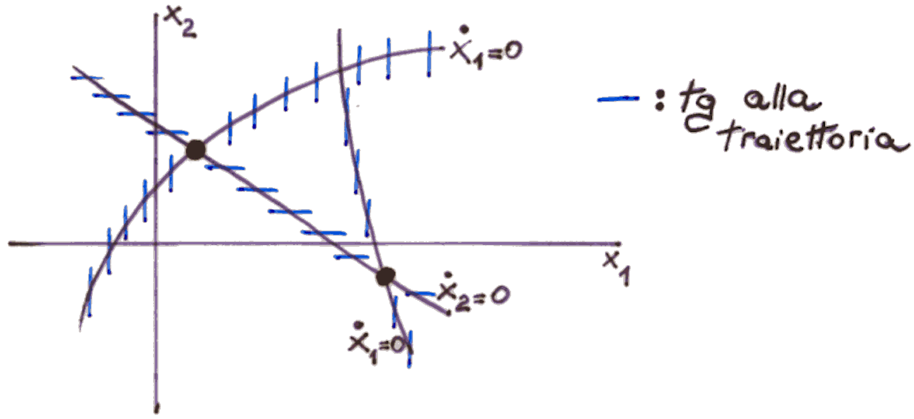
Esempio: sistemi del 1° ordine





Esempio: sistemi a tempo continuo del 2° ordine (isocline)

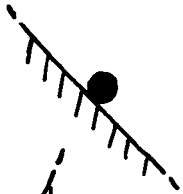
$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2) \qquad \dot{x}_1=0 \Leftrightarrow f_1(x_1,x_2)=0$$
$$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2) \qquad \dot{x}_2=0 \Leftrightarrow f_2(x_1,x_2)=0$$



MOLTEPLICITÀ DEGLI EQUILIBRI

Il numero di equilibri di un sistema può essere

- 0 (=nessun equilibrio)



- 1 (=equilibrio unico)

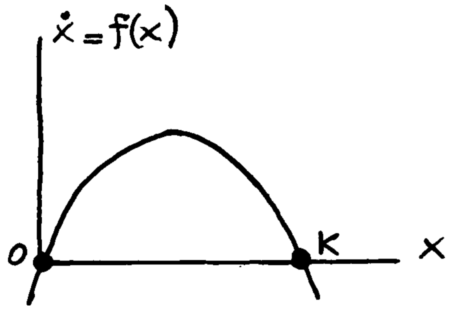
- finito >1 ("equilibri multipli")
(non in un sistema lineare !)

- ∞ numerabile
(non in un sistema lineare !)

- ∞ non numerabile

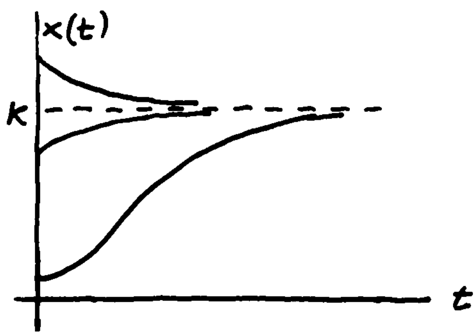
Esempio: crescita logistica: $x(t)$ = biomassa all'istante t

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right)$$



2 equilibri: $\begin{cases} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = k \text{ (capacità portante)} \end{cases}$

La biomassa $x(t)$ tende verso la capacità portante k.



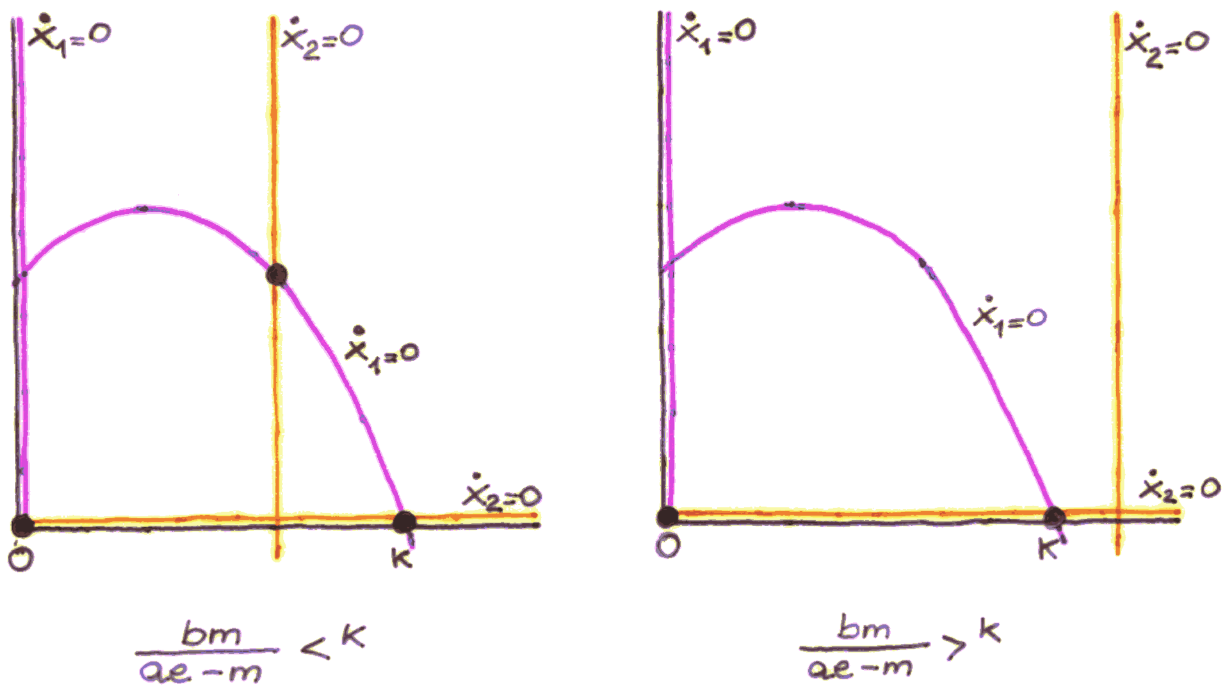
Esempio: modello preda-predatore:

$x_1(t)$ = biomassa delle prede
$x_2(t)$ = biomassa dei predatori

$$\dot{x}_1 = rx_1\left(1-\frac{x_1}{k}\right)-\frac{ax_1x_2}{b+x_1} \qquad r,k,a,b,m,e>0$$
$$\dot{x}_2 = -mx_2 + e\frac{ax_1x_2}{b+x_1}$$

Equilibri e isocline si trovano ponendo:

$$x_1\left[r\left(1-\frac{x_1}{k}\right)-\frac{ax_2}{b+x_1}\right]=0$$
$$x_2\left\{-m+e\frac{ax_1}{b+x_1}\right\}=0$$



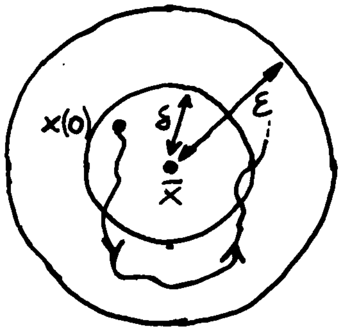
STABILITÀ

Definizione

Un equilibrio $\bar{x}$ è stabile (localmente) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon \quad \forall x(0), \forall t \geq 0$$

[Qualunque piccola perturbazione dello stato non porta il sistema lontano dall'equilibrio.]



Definizione

Un equilibrio $\bar{x}$ è asintoticamente stabile se è stabile e se

$$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \bar{x} \quad \forall x(0)$$

[Qualunque piccola perturbazione dello stato viene asintoticamente riassorbita.]

Definizione

Un equilibrio $\bar{x}$ è instabile se non è stabile.

Definizione

Dato un equilibrio $\bar{x}$ asintoticamente stabile, l'insieme

$$B(\bar{x}) = \{x(0) : x(t) \to \bar{x}\}$$

è detto bacino di attrazione di $\bar{x}$.

Definizione

Un equilibrio $\bar{x}$ asintoticamente stabile è detto globalmente stabile se $B(\bar{x}) = R^n$ (con l'eccezione al più di un insieme di misura nulla).

STABILITÀ: ESEMPI

Nota Bene: nei sistemi non lineari la stabilità è una proprietà dell'equilibrio e non del sistema: lo stesso sistema può possedere equilibri stabili e instabili.

Esempio: crescita logistica

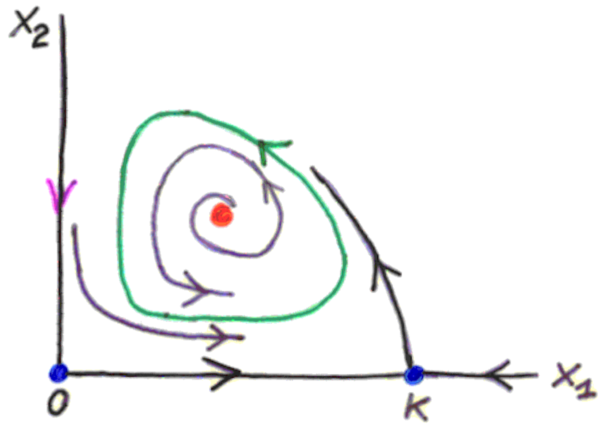
$\bar{x} = 0$ è instabile.

$\bar{x} = k$ è asintoticamente stabile.

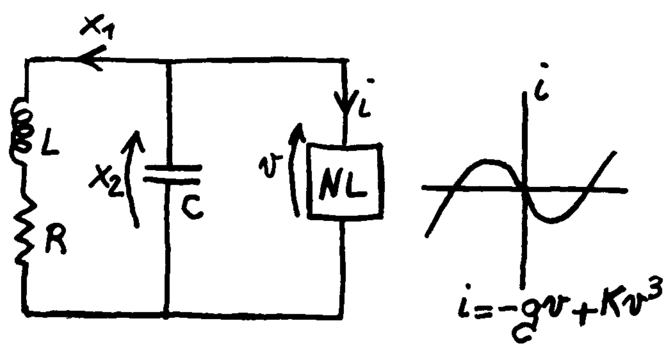
$B(k) = R_+$

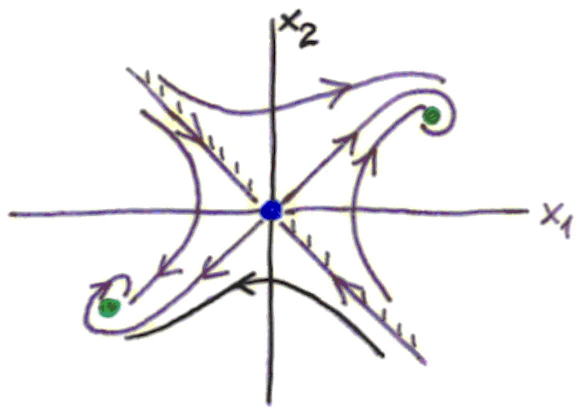
Esempio: modello preda-predatore

3 equilibri instabili.



Esempio: circuito elettrico



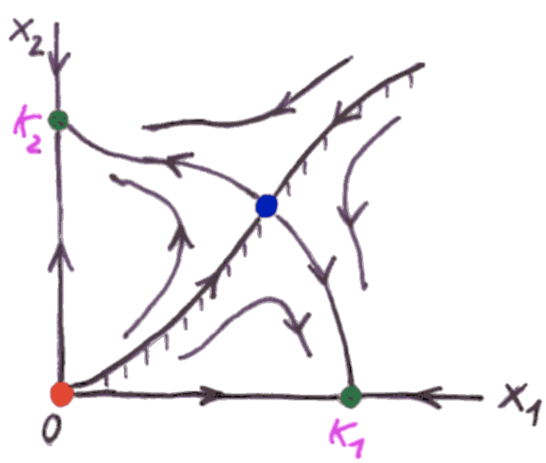


Esempio: competizione fra batteri

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k_1}\right) - a_1 x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{k_2}\right) - a_2 x_1 x_2$$

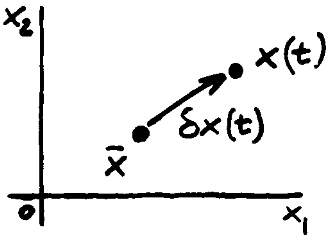
4 equilibri: 2 asintoticamente stabili + 2 instabili



IL SISTEMA LINEARIZZATO E LA MATRICE JACOBIANA

Consideriamo $\dot{x}(t) = f(x(t))$ e un suo equilibrio $\overline{x}$ ($f(\overline{x}) = 0$).

$$\partial x(t) = x(t) - \overline{x}$$



$\partial x(t)$ è governato dall'equazione di stato

$$\partial \dot{x}(t) = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(\overline{x} + \partial x(t)) = f(\overline{x}) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\overline{x}} \partial x(t) + O(\partial x(t)^2)$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\overline{x}} \partial x(t) + O(\partial x(t)^2)$$

Definiamo sistema linearizzato nell'intorno di $\overline{x}$ il sistema lineare che si ottiene troncando lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$\partial \dot{x}(t) = J(\overline{x}) \partial x(t)$$

dove $J(x)$ è la matrice Jacobiana ($n \times n$)

$$J(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Varietà Stabile, Instabile, Centro

Se $J(\overline{x})$ possiede

$$
\begin{aligned}
&n^- \text{ autovalori con } \mathrm{Re}(\lambda) < 0 \\
&n^+ \text{ autovalori con } \mathrm{Re}(\lambda) > 0 \\
&n^0 \text{ autovalori con } \mathrm{Re}(\lambda) = 0
\end{aligned}
$$

allora nell'intorno di $\overline{x}$ esistono

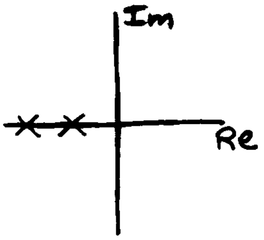
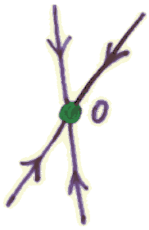
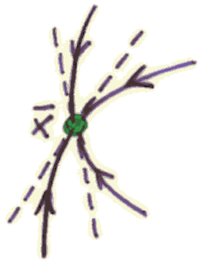
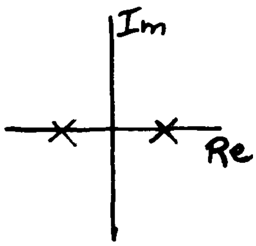
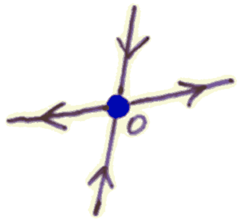
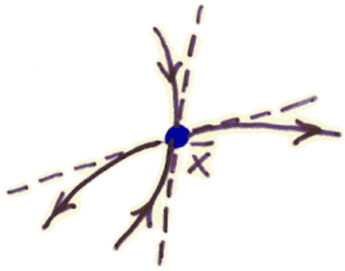
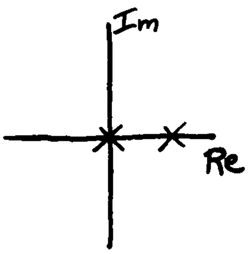
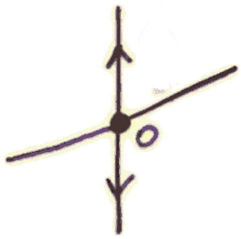
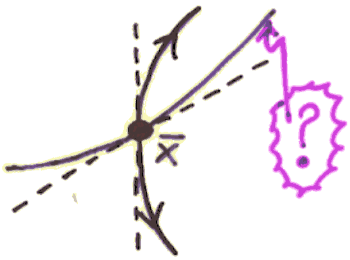
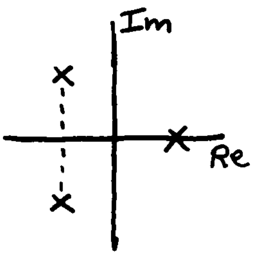
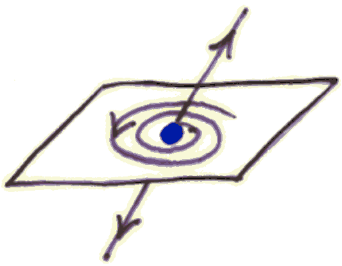
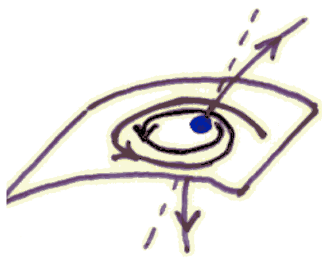
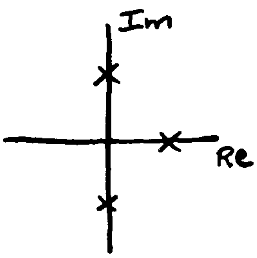
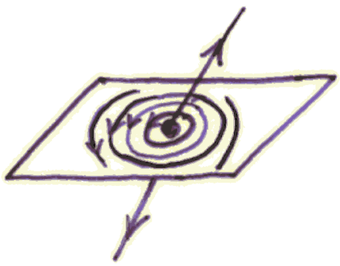
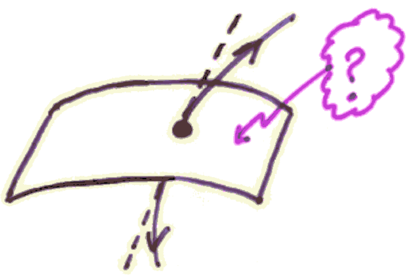
$$
\begin{aligned}
W^s &= \text{varietà stabile } (\dim W^s = n^-) \\
W^u &= \text{varietà instabile } (\dim W^u = n^+) \\
W^0 &= \text{varietà centro } (\dim W^0 = n^0)
\end{aligned}
$$

tali che

- sono invarianti ($x(0) \in W^{s,u,0}$ implica $x(t) \in W^{s,u,0}$ $\forall t \geq 0$)
- sono tangenti in $\overline{x}$ alle corrispondenti varietà del sistema linearizzato
- la dinamica su W^s e su W^u è equivalente a quella del sistema linearizzato
- la dinamica su W^0 dipende invece dai termini di ordine superiore al primo dello sviluppo di Taylor ($O(\partial x(t)^2)$) $\Rightarrow$ non può essere studiata per mezzo del sistema linearizzato

Nota Bene: nel caso di sistema a tempo discreto $x(t+1)=f(x(t))$, il sistema linearizzato nell'intorno di un equilibrio $\overline{x}$ si definisce in modo del tutto analogo. Le varietà stabile, instabile, centro, sono associate rispettivamente agli autovalori con $|\lambda| < 1$, $|\lambda| > 1$, $|\lambda| = 1$.

Esempi

autovalori di J	$\partial\dot{x} = J(\bar{x})\partial x$	$\dot{x} = f(x)$
		
		
		
		
		

LINEARIZZAZIONE E STABILITÀ

Le proprietà relative a W^s, W^u, W^0 implicano i risultati seguenti.

Teorema

$$J(\bar{x}) \text{ asintoticamente stabile} \Rightarrow \bar{x} \text{ asintoticamente stabile}$$

$J(\bar{x})$ asintoticamente stabile significa che $J(\bar{x})$ ha tutti gli autovalori strettamente stabili ($\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ o $|\lambda_i| < 1 \ \forall i$).

Teorema

$$J(\bar{x}) \text{ esponenzialmente instabile} \Rightarrow \bar{x} \text{ instabile}$$

$J(\bar{x})$ esponenzialmente instabile significa che $J(\bar{x})$ ha almeno un autovalore strettamente instabile ($\exists i$ tale che $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ o $|\lambda_i| > 1$).

Esempio: crescita logistica:

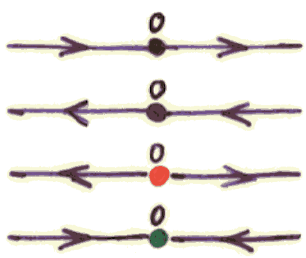
$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad \Rightarrow \quad J(x) = r\left(1 - 2\frac{x}{k}\right)$$

$$\text{2 equilibri: } \begin{cases} \bar{x} = 0, \quad J(0) = r, \quad \text{instabile} \\ \bar{x} = k, \quad J(k) = -r, \quad \text{asintoticamente stabile} \end{cases}$$

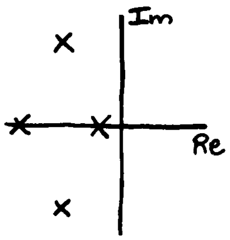
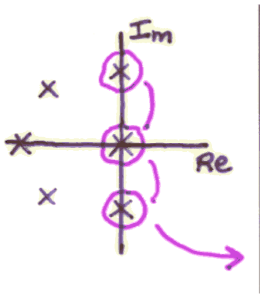
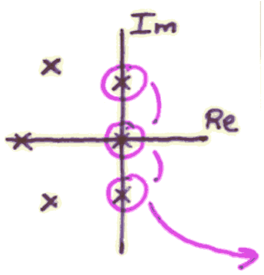
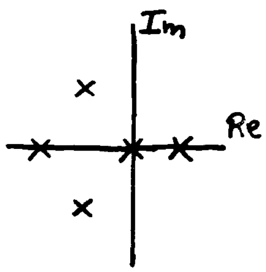
Nota Bene: se $J(\bar{x})$ è semplicemente stabile o debolmente (non esponenzialmente) instabile non si può dedurre nulla a proposito della stabilità di $\bar{x}$.

Esempio: sistemi quadratici e cubici:

$$\begin{array}{llll} \dot{x} = x^2, & \bar{x} = 0, & J(x) = 2x, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \\ \dot{x} = -x^2, & \bar{x} = 0, & J(x) = -2x, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \\ \dot{x} = x^3, & \bar{x} = 0, & J(x) = 3x^2, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \\ \dot{x} = -x^3, & \bar{x} = 0, & J(x) = -3x^2, & J(\bar{x})=0 \Rightarrow ??? \end{array}$$



ESEMPI

autovalori di J	$\partial\dot{x} = J(\bar{x})\partial x$	$\bar{x}$
	ASINTOTICAMENTE STABILE	ASINTOTICAMENTE STABILE (esponenzialmente)
	SEMPLICEMENTE STABILE *radici SEMPLICI del polinomio minimo*	
	INSTABILE (debolmente) *almeno uno è radice MULTIPLA del polinomio minimo*	
	INSTABILE (fortemente)	INSTABILE (esponenzialmente)