$\boxed{1}$ Tracciare qualitativamente la risposta allo scalino (unitario) dei seguenti sistemi

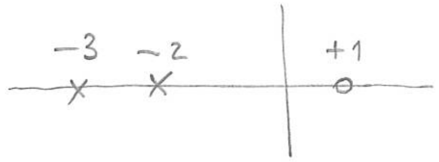
$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s+3)(s+2)} \qquad G_2(s) = \frac{s-1}{s+2}$$

In entrambi i casi determinare la risposta anche analiticamente

---

$$G_1 = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)} \qquad p_1 = -2 \quad p_2 = -3$$

- $\mathrm{Re}(p_i) < 0 \rightarrow$ E.S. $\rightarrow y$ limitata
- $p_i \in \mathbb{R}^- \rightarrow \nexists$ oscillazioni
- $p_D = -2 \quad T_D = \frac{1}{2} \quad T_R = \frac{5}{2}$
- 2 poli e 1 zero $\rightarrow r = 1 \rightarrow y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 1$
- $y_\infty = G_1(0) = -\frac{1}{6}$
- zero in $+1$

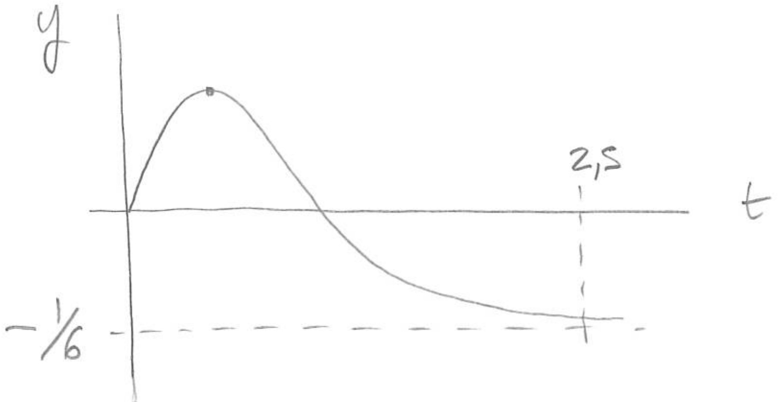


G_1 è proprio e con zeri/poli reali $\Rightarrow$ posso applicare il teorema degli estremi per le risposte a scalino

\# zeri superiori $m_S = 1$
\# zeri mal inquadrati $\delta = 0$

$$m_S \leq N \leq m_S + \delta \quad \rightarrow \quad N = 1$$

Pertanto ...



Determino la risposta analitica con il metodo di Heaviside

$$Y = G_1 U = \frac{s-1}{s(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$\downarrow$

$u(t) = sca(t)$

$\Downarrow$

$U(s) = \frac{1}{s}$

$$A(s+2)(s+3) + Bs(s+3) + Cs(s+2) = s-1$$

$A+B+C=0$ $\quad\quad A=-1/6$

$5A+3B+2C=1 \quad \rightarrow \quad B=3/2$

$6A=-1$ $\quad\quad C=-4/3$

$$Y = -\frac{1}{6}\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{4}{3}\frac{1}{s+3} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-3t}$$

$$G_2 = \frac{s-1}{s+2}$$

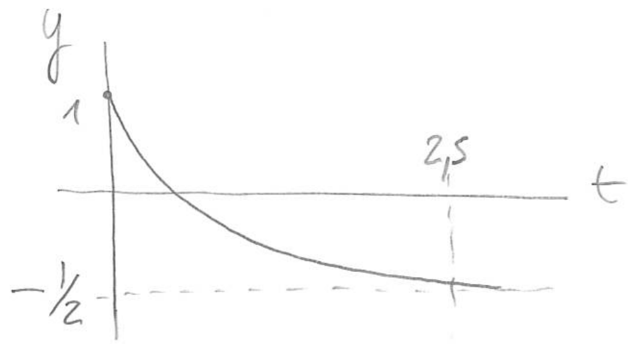
- $p=-2 \rightarrow$ E.S. $\rightarrow$ y limitata
- $T_D = \frac{1}{2}$ $\quad T_R = 5/2$
- $p \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists$ oscillazioni

- # zeri = 1 # poli = 1 $\rightarrow r=0 \rightarrow y(0) = 1$
- $y_\infty = G(0) = -\frac{1}{2}$
- G_2 è improprio (# zeri = # poli) $\Rightarrow$ il teorema degli estremi non è applicabile

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot \mathcal{L}[\dot{y}] = \lim_{s\to\infty} s\Big[s\underbrace{\mathcal{L}[y]}_{G_2 \cdot U} - y(0)\Big] =$$

$$= \lim_{s\to\infty} s\left[\cancel{s} \cdot G_2 \cdot \frac{1}{\cancel{s}} - y(0)\right]$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\left[\frac{s-1}{s+2} - 1\right] = \lim_{s\to\infty} s \cdot \left[\frac{-3}{s+2}\right] = -3$$



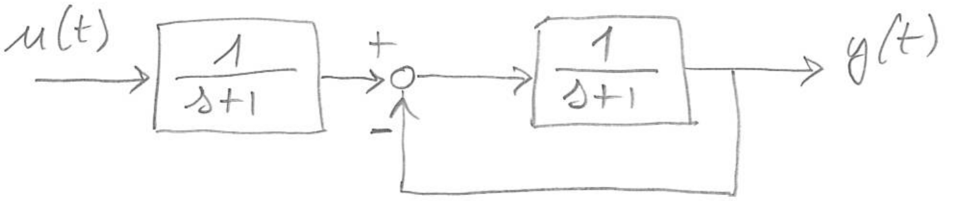
Risposta analitica con Heaviside

$$Y = G_2 U = \frac{s-1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

$$A(s+2) + Bs = s-1 \rightarrow \begin{matrix} A+B=1 \\ 2A=-1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} A = -1/2 \\ B = 3/2 \end{matrix}$$

$$Y = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

2 Tracciare qualitativamente la risposta allo scalino e all'impulso del seguente sistema



$$G = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\frac{1}{1+s}}{1 + \frac{1}{1+s}} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

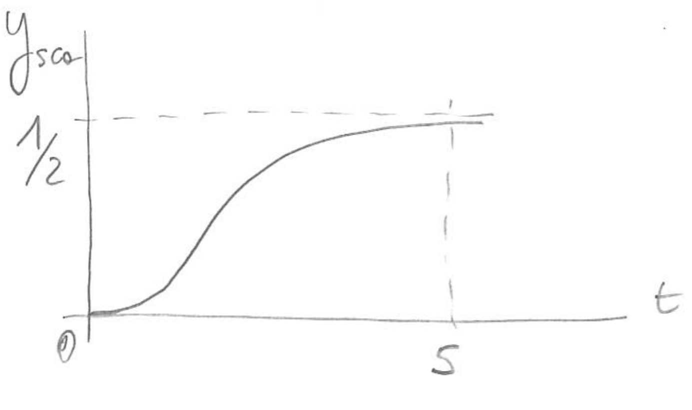
$p_1 = -1$

$p_2 = -2$

SCALINO

- $p_i < 0 \rightarrow$ E.S. $\rightarrow y$ limitata
  $\rightarrow \not\exists$ oscillazioni
- $p_D = -1 \rightarrow T_D = 1 \rightarrow T_R = 5$
- $\#$poli $= 2$ $\quad \#$zeri $= 0$ $\quad \rightarrow r = 2 \Rightarrow y(0) = \dot{y}(0) = 0$
  $\ddot{y}(0) = 1$
- $y_\infty = G(0) = \frac{1}{2}$
- G è proprio con poli reali $\Rightarrow$ applico il teo. degli estremi

$m_s = 0 \qquad \delta = 0 \Rightarrow N = 0$



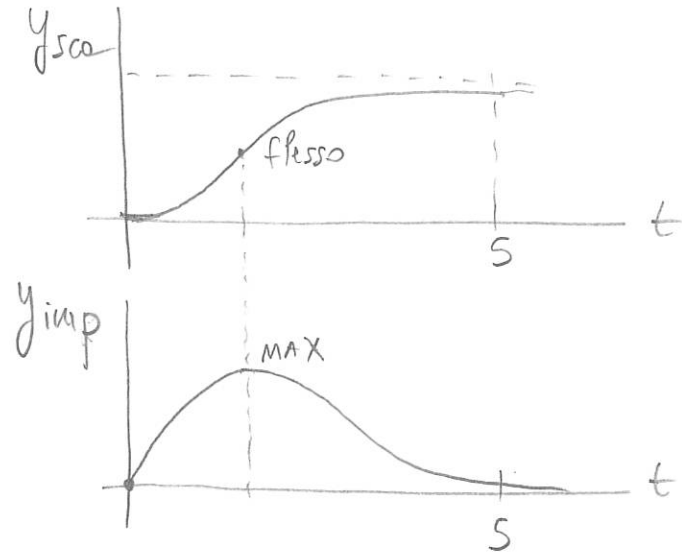
IMPULSO

Essendo G proprio $\xrightarrow[y(0)=0]{}$ $y_{imp} = \dfrac{dy_{sca}}{dt}$

$\rightarrow y_{imp}(0) = \dot{y}_{sca}(0) = 0$ $\rightarrow y_{sca}$ crescente $\Rightarrow \dot{y}_{sca} = y_{imp} > 0$

$\rightarrow \dot{y}_{imp}(0) = \ddot{y}_{sca}(0) = 1$ $\rightarrow \underbrace{\dot{y}_{imp}=0}_{\text{MAX/MIN}}$ per $\underbrace{\ddot{y}_{sca}=0}_{\text{pto di flesso}}$

$\rightarrow y_{imp}^{\infty} = \dot{y}_{sca}^{\infty} = 0$



Oppure

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\,\underbrace{Y(s)}_{Y=GU \text{ con } U=\mathcal{L}[imp(t)]=1} = \lim_{s\to\infty} s\cdot G = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{(s+1)(s+2)} = 0$$

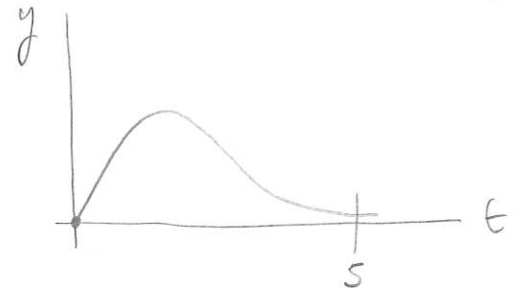
$$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\,\mathcal{L}[\dot{y}] = \lim_{s\to\infty} s\,[sY - y(0)] = \lim_{s\to\infty} s\,[sG - 0] =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(s+1)(s+2)} = 1$$

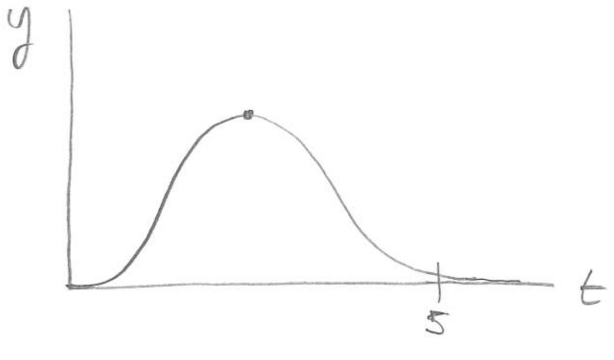
$p_D = -1 \rightarrow T_R = 5$ $\quad p_i \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists$ oscill.

$$y_\infty = \lim_{s \to 0} s\,Y(s) = \lim_{s \to 0} s\,G = \lim_{s \to 0} \frac{s}{(s+1)(s+2)} = 0$$

Da cui si ottiene, come prima,



$\boxed{3}$ Proporre una semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello rappresentato in figura.



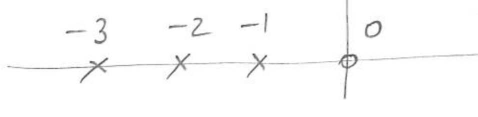
$y(0) = \dot{y}(0) = 0$
$\ddot{y}(0) > 0$

- y limitata $\to$ E.S. $\to \mathrm{Re}(p_i) < 0$
- $\nexists\,\infty$ oscillazioni $\to p_i \in \mathbb{R}$
- $T_R = 5 \quad T_D = 1 \quad d_D = -1$
- $y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) \neq 0 \to r = 2$
- $y_\infty = G(0) = 0 \to$ zero nell'origine $\to m_s \geq 1$
- $N = 1$ Estremo — Dovendo essere $m_s \geq 1$ e $m_s \leq N \leq m_s + \sigma$

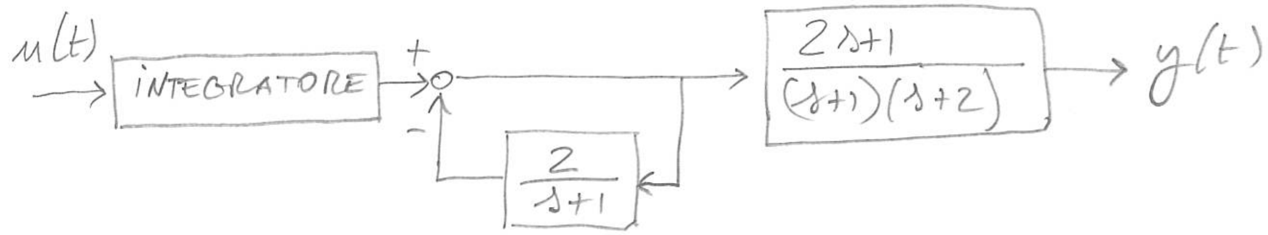
  $\Longrightarrow m_s = 1$ e, per esempio, $\sigma = 0$

Una possibile soluzione è:

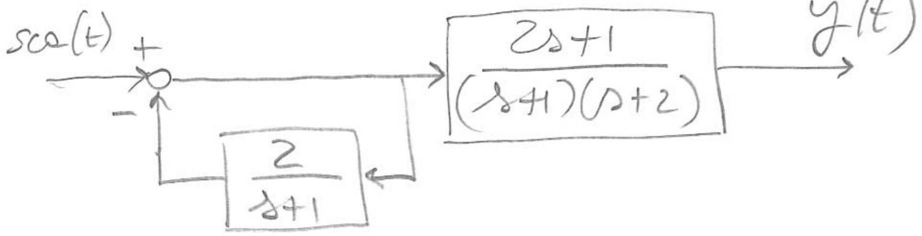
$$G = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



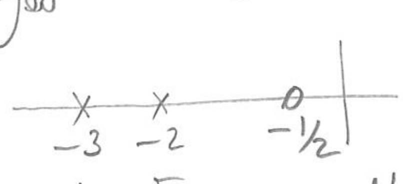
$\boxed{4}$ Tracciare l'andamento qualitativo della risposta all'impulso (unitario) del sistema in figura



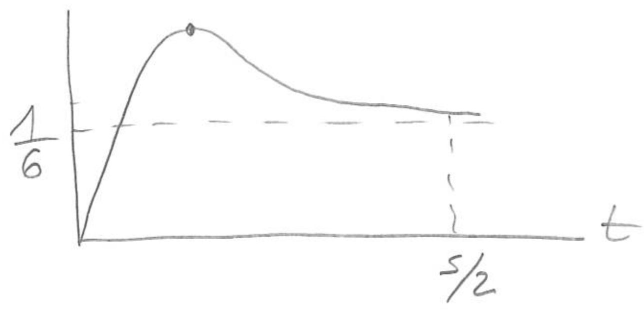
Poiché $imp(t) \longrightarrow \boxed{\text{INTEGRATORE}} \longrightarrow sca(t)$ posso studiare la risposta all'impulso come la risposta allo scalino del sistema



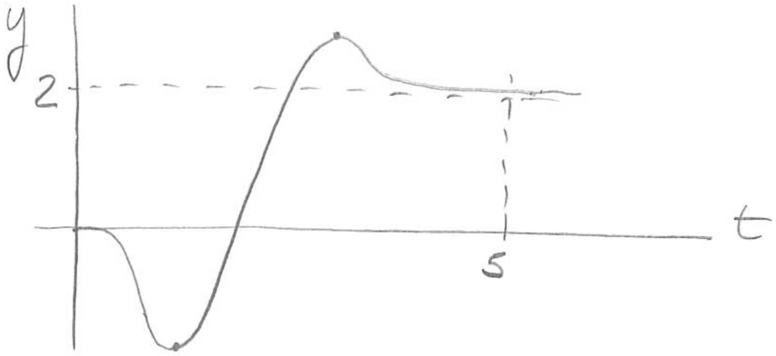
$$G(s) = \frac{1}{1+\frac{2}{s+1}} \cdot \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{2s+1}{(s+2)(s+3)} \qquad \begin{array}{l} p_1 = -2 \\ p_2 = -3 \end{array}$$

- $p_i \in \mathbb{R}^- \rightarrow$ E.S. $\rightarrow y$ limitata
  $\rightarrow \nexists$ oscillazioni
- $p_D = -2 \quad T_D = \frac{1}{2} \quad T_R = 5/2$
- $\#\text{poli} = 2 \quad \#\text{zeri} = 1 \rightarrow r = 1 \rightarrow y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 2$
- $y_\infty = G(0) = \frac{1}{6}$
- 

$m_s = 1 \quad \sigma = 0 \rightarrow N = 1$



$\boxed{5}$ Proporre una semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quella rappresentata in figura



$\ddot{y}(0) < 0$

- y limitata $\to$ E.S. $\to \mathbb{R}e(\text{poli}) < 0$
- $\nexists\ \infty$ oscill $\to$ poli $\in \mathbb{R}$
- $T_R = 5 \quad T_D = 1 \quad p_D = -1$
- $y(0) = \dot{y}(0) = 0 \quad \ddot{y}(0) \neq 0 \to r = 2$
- $y_\infty = G(0) = 2$
- $N = 2 \to$ dovendo essere $m_s \le N \le m_s + \sigma$ potrebbe essere (in un contesto di f. di t. "semplice")

$\rightsquigarrow m_s = 2 \quad \sigma = 0$

oppure

$\rightsquigarrow m_s = 0 \quad \sigma = 2$ (N pari, essendo m_s pari $\Rightarrow N = 0$ oppure $N = 2$ ✓)

In entrambi i casi avrei almeno
2 zeri con $r = 2 \Rightarrow$ almeno 4 poli

Ipotizzo quindi...

$$\ldots \quad G(s) = \mu \frac{(1+As)(1+Bs)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

dove :

$$y_\infty = G(0) = 2 = \frac{\mu}{24} \rightarrow \mu = 48$$

$$\ddot{y}(0) = \frac{\mu A \cdot B}{1} < 0 \quad \Rightarrow A \text{ e } B \text{ discordi} \rightsquigarrow$$

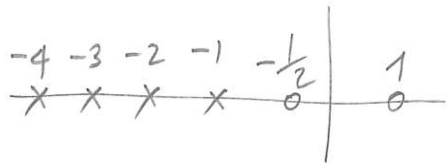
per esempio $A > 0$ zero stabile, $B < 0$ zero instabile

$\Rightarrow$ deve $\exists$ almeno uno zero instabile $\Rightarrow m_s > 0$

Pertanto $m_s = 2$ (con $\delta = 0$) $\Rightarrow A = 2 \quad B = -1$

$$\Rightarrow G = 48 \frac{(1+2s)(1-s)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

che soddisfa tutte le richieste



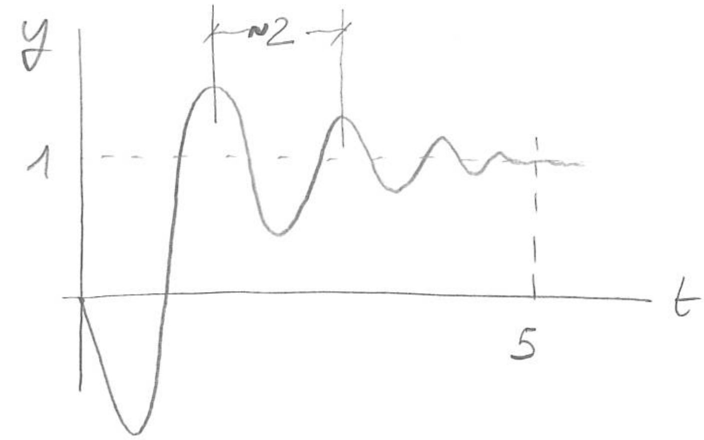
$m_s = 2$

$\delta = 0$

$\Downarrow$

$N = 2$

$\boxed{6}$ Proporre una semplice funzione di trasferimento che abbia come risposta allo scalino unitario quello mostrato in figura.



$\dot{y}(0) = -20$

- y limitata $\rightarrow$ E.S. $\rightarrow \mathrm{Re}(\text{poli}) < 0$
- $\exists \infty$ oscillazioni $\rightarrow \exists p_i \in \mathbb{C}$

$$\frac{2\pi}{T_{oscill}} = \frac{2\pi}{\sim 2} = \mathrm{Im}(p_i) \simeq 3$$

$\rightarrow p_{1,2} = -1 \pm 3i$

- $T_R = 5 \rightarrow T_D = 1 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D) = -1$
- $y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) \neq 0 \rightarrow r = 1$
- $y_\infty = G(0) = 1$

Ipotizzo $\quad G = \mu \dfrac{1 + \alpha s}{s^2 + 2s + 10}$

deve essere:

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = \dfrac{\alpha \mu}{1} = -20 \\ G(0) = \dfrac{\mu}{10} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \mu = 10 \end{cases} \Rightarrow G = 10 \, \frac{1 - 2s}{s^2 + 2s + 10}$$