Dato il sistema $\dot{x} = Ax + bu$, $y = cx$

$$A = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

a) Studiarne la stabilità

b) Dire se esiste un regolatore stabilizzante. In caso affermativo determinarne uno che esaurisca i transitori in 5 unità di tempo.

---

a) $tr(A) = -3 < 0$

$det(A) = -10 < 0 \rightarrow$ INSTAB

b) $R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad det(R) \neq 0 \rightarrow CR \rightarrow \exists$ legge di controllo stabilizzante

$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad det(\theta) \neq 0 \rightarrow CO \rightarrow \exists$ ricostruttore asintotico dello stato

$\Rightarrow \exists$ regolatore stabilizzante

$T_R = 5 \rightarrow T_D = 1 \rightarrow Re(\lambda_D) = -1 \rightarrow \lambda_i^* = -1 \quad i = 1, \dots 4$

$$A + bk = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} |k_1 \;\; k_2| = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3+k_1 & 1+k_2 \end{vmatrix}$$

$tr(A+bk) = -3 + k_2 = -2$

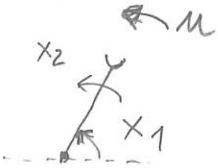
$det(A+bk) = -4(1+k_2) + 2(-3+k_1) = 1$ $\quad \rightarrow k = \begin{vmatrix} \frac{15}{2} & 1 \end{vmatrix}$

$$A + lc = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} |0 \;\; 1| = \begin{vmatrix} -4 & -2+l_1 \\ -3 & 1+l_2 \end{vmatrix}$$

$tr(A+lc) = -3 + l_2 = -2$

$det(A+lc) = -4(1+l_2) + 3(-2+l_1) = 1$ $\quad \rightarrow l = \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$

Regolazione della posizione dell'antenna



$\exists$ attrito viscoso

J = momento di inerzia

x_1 = posizione angolare
x_2 = velocità angolare
u = coppia applicata all'antenna

Modello

$$\mathring{x}_1 = x_2$$

$$\mathring{x}_2 = \frac{1}{J}\left(u - h x_2\right)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{h}{J} \end{matrix} \implies S.S.$$

equilibri $\quad \bar{u} = 0 \Rightarrow \exists \infty \quad \bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\bar{u} \neq 0 \Rightarrow \nexists$ equilibri $\left(\begin{matrix} \mathring{x}_1 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0 \\ \mathring{x}_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = \bar{u} \end{matrix} \; ? \right)$

$\Rightarrow$ Misuro solo $y = x_1$, ma non ricostruisco x_2, cosa riesco a fare?

$$u = k y = k x_1$$

$$\left.\begin{matrix} \mathring{x}_1 = x_2 \\ \mathring{x}_2 = \frac{1}{J}\left(k x_1 - h x_2\right) \end{matrix}\right. \rightarrow \tilde{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} tr(\tilde{A}) = -\frac{h}{J} < 0 \\ det(\tilde{A}) = -\frac{k}{J} \end{matrix}$$

Se $k < 0 \rightarrow det(\tilde{A}) > 0 \implies$ è possibile rendere il sistema controllato asintoticamente stabile.

Tuttavia, non è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori. Infatti: $\lambda_1^* + \lambda_2^* = -\frac{h}{J} \quad \forall k$

Inoltre

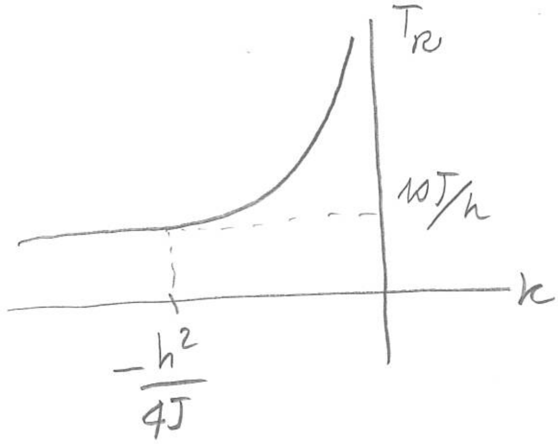
$$\Delta_{\tilde{A}} = \lambda^2 + \frac{h}{J}\lambda - \frac{k}{J} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2+4kJ}}{2J}$$

- $k < -\frac{h^2}{4J}$ $\quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{Re}(\lambda_{1,2}) = \mathbb{Re}(\lambda_D) = \frac{-h}{2J}$

$$T_D = \frac{2J}{h} \quad T_R = \frac{10\,J}{h}$$

- $-\frac{h^2}{4J} < k < 0$ $\quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{Re} \rightarrow \lambda_D = \frac{-h + \sqrt{h^2+4kJ}}{2J}$

$$T_R = \frac{10\,J}{h - \sqrt{h^2+4kJ}}$$



$$\Longrightarrow T_R \geq T_R^{min} = \frac{10\,J}{h}$$

NOTA

Se volessi poi portare il sistema verso $\bar{x} = \begin{vmatrix} x_1^* \\ 0 \end{vmatrix}$ devo applicare una coppia $\bar{V}$ al sistema tale che

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{J}\left(k x_1 - h x_2 + \bar{V}\right) \end{aligned} \xrightarrow{EQUIL} \begin{aligned} &\bar{x}_2 = 0 \quad \checkmark \\ &k\bar{x}_1 + \bar{V} = 0 \xrightarrow[\bar{x}_1 = x_1^*]{} \bar{V} = -k x_1^* \end{aligned}$$

Misurando solo x_1 (senza ricostruire x_2) rendo il sistema controllato asintoticamente stabile ma con dinamica non arbitraria ($T_R \geq T_R^{min}$)

⇒ Misuro sia x_1 che x_2. Cosa riesco a fare?

$u = kx + v$

↳ retroazione statica a partire da tutto lo stato

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{h}{J} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{vmatrix} = b$$

$$R = |b \quad Ab| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ 1 & -\frac{h}{J^2} \end{vmatrix} \qquad \det R \neq 0 \rightarrow C.R.$$

⇒ Posso stabilizzare il sistema con dinamica arbitraria

(**NOTA**

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(k_1 x_1 + k_2 x_2 + v - h x_2) \xrightarrow{EQUIL} \begin{array}{l} \bar{x}_2 = 0 \\ k_1 \bar{x}_1 + \bar{v} = 0 \end{array}$$

↳ x_1^*

Per $\bar{v} = -k_1 x_1^*$ ottengo l'equilibrio desiderato $\begin{vmatrix} x_1^* \\ 0 \end{vmatrix}$)

→ La misura di x_2 potrebbe essere costosa/difficile

Misuro solo x_1 ma ricostruisco (se possibile) x_2

$y = x_1$

$c = |1 \quad 0|$

$$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\det \theta \neq 0 \rightarrow C.O. \Rightarrow$ posso ricostruire tutto x (anche x_2) con dinamica arbitraria

Essendo poi il sistema CR potrò progettare con lo stato ricostruito una legge di controllo stabilizzante (e con dinamica arbitraria)

$\Rightarrow$ nel suo complesso, posso progettare un regolatore stabilizzante

Esempio $h=1$ $J=1$ $T_R=5 \rightsquigarrow \lambda_D=-1$.

$$\Delta_{REG} = \Delta_{A+bk} \cdot \Delta_{A+lc} = (\lambda+1)^2(\lambda+1)^2$$

$$A+bk = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$tr(A+bk) = -1+k_2 = -2 \rightarrow k_2=-1 \qquad k = \begin{vmatrix} -1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$det(A+bk) = -k_1 = 1 \rightarrow k_1 = -1$$

$$A+lc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$tr(A+lc) = l_1 - 1 = -2 \rightarrow l_1 = -1 \qquad l = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$
$$det(A+lc) = -l_1 - l_2 = 1 \rightarrow l_2 = 0$$

NOTA $\quad \dot{x} = Ax + bu \underset{\substack{\downarrow \\ u = k\hat{x}+v}}{=} Ax + bk\hat{x} + bv$

A regime $\hat{x} \to x \Rightarrow \dot{x} = (A+bk)x + bv$

All'equilibrio $(A+bk)\bar{x} + b\bar{v} = 0$

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} x_1^* \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1^* \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \bar{V} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$0 = 0$ ✓

$k_1 x_1^* + \bar{V} = 0 \Rightarrow \bar{V} = -k_1 x_1^*$ permette di raggiungere l'equilibrio desiderato

Dato il sistema a tempo continuo

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad b=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$c=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

studiarne la stabilità asintotica e la stabilità esterna.

Stabilità asintotica: A è triangolare a blocchi:

$$A=\left|\begin{array}{c:cc} 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right| \quad \text{con } A_2=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\sigma(A)=\{2\}\cup\sigma(A_2) \longrightarrow A$ è INSTABILE

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tr} A_2=-2<0 \\ \det A_2=2>0 \end{array}\right\} A_2 \text{ asint. stab.}$$

Ricavo la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} sX_1 &= +2X_1+X_3 \\ sX_2 &= -X_2+X_3 \\ sX_3 &= -X_2-X_3+u \\ y &= X_1 \end{aligned} \implies G(s)=\frac{(s+1)}{(s-2)(s^2+2s+2)}$$

$\{\text{poli}\}=\{+2,-1\pm i\}$

$\exists i \,/\, \operatorname{Re}(p_i)>0 \ \forall i$

$\Downarrow$

sistema NON esternamente stabile

$\text{grado}[\text{den}[G(s)]]=3=n$

$\Updownarrow$

Σ compl. raggiung. & compl. osservabile

$\Updownarrow$

$\{\text{poli}\}=\{\text{autovalori}\}=\sigma(A)$

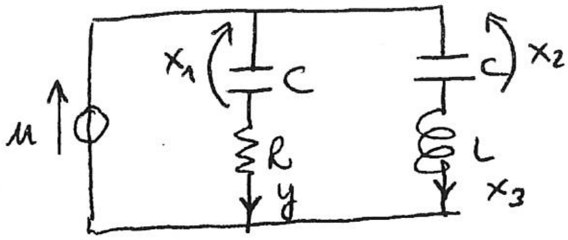
$\Updownarrow$

Σ ASINT. STAB. $\Longleftrightarrow$ Σ ESTERN. STAB.

NOTA: $y=x_2 \Rightarrow G=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$

$\operatorname{Re}(p_i)<0 \Rightarrow$ sistema E.S.

Si dimostri che la rete elettrica in figura non è asintoticamente stabile ma è esternamente stabile

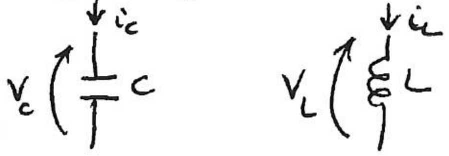


y per limitata per u limitata $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}(\text{poli})<0$

$\Downarrow$

$A.S \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} E.S.$ $\left(\{\lambda\} \supseteq \{\text{poli}\}\right)$

$i_c = C\,\dot{V}_c \qquad V_L = L\,\dot{i}_L$



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right]$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right]$$

$$y = \frac{u - x_1}{R}$$

$\mathrm{Re}<0$

$$A = \left|\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{RC} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 \end{array}\right|$$

$tr = 0$

$\det = \frac{1}{LC}$

$$\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{LC}}$$

$\Longrightarrow$ A è semplicemente stabile (NON è quindi A.S)

Calcolo f.d.t

$Ry = u - x_1 \longrightarrow Ry = u - \dfrac{u}{sRC+1}$

$sRCx_1 = u - x_1 \rightarrow x_1 = \dfrac{u}{sRC+1}$

$$R(sRC+1)y = sRCu \Rightarrow G(s) = \frac{s\cancel{R}C}{\cancel{R}(sRC+1)}$$

polo in $-\frac{1}{RC}$ $\rightarrow$ stabilità esterna ($\mathrm{Re}(p)<0$)

(NB) La stabilità esterna dipende dalla scelta di y!

Esempio : $y = x_3$

$$\Rightarrow \quad \mathring{x}_1 = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R}\right]$$

$$\mathring{x}_2 = \frac{1}{C}\left[x_3\right] \longrightarrow sCx_2 = x_3 \rightarrow x_2 = \frac{x_3}{sC}$$

$$\mathring{x}_3 = \frac{1}{L}\left[u - x_2\right] \longrightarrow Lsx_3 = u - x_2 \rightarrow Lsx_3 = u - \frac{x_3}{sC}$$

$$y = x_3$$

$$x_3 = \frac{u\,sC}{s^2LC+1} \Rightarrow y = \frac{sC}{s^2LC+1}u$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{sC}{s^2LC+1} \longrightarrow \text{poli in } \pm\frac{i}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \text{non è esternamente stabile}$$