Dato il sistema $\overset{\circ}{x} = Ax + bu$ $\quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = b$

a) studiarne la stabilità

b) Studiarne la raggiungibilità

c) Dire se, con una legge di controllo $u = kx + v$, è possibile stabilizzare il sistema

d) Dire se è possibile avere una durata dei transitori inferiore o uguale a 10 unità di tempo. In caso affermativo, determinare una legge di controllo k.

e) Supponendo $y = x_1$, dire se è possibile stabilizzare il sistema con la legge di controllo $u = ky$.

---

a) $tr(A) = 0$
$det(A) = -3$ $\rightarrow \lambda^2 - 3 = 0 \quad \lambda_1 = +\sqrt{3} \quad \lambda_2 = -\sqrt{3}$

$\downarrow$
INSTABILE

b) $R = |b \ Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad det(R) \neq 0 \longrightarrow CR$

c) Sì perché il sistema è CR

(A,b) CR $\Leftrightarrow \forall \Delta^* \ \exists \ k \ / \ \Delta_{A+bk} = \Delta^*$

In particolare, posso fissare gli autovalori di $A+bk$ in modo che siano a $\mathbb{R}e < 0 \rightarrow A+bk$ A.S.

d) $T_R \leq 10 \xrightarrow{scelgo} T_R = 10 \rightarrow T_D = 2$ e $\mathbb{R}e(\lambda_D) = -\frac{1}{2}$

Pongo $\lambda_1^* = \lambda_2^* = -\frac{1}{2}$

$$A+bk = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k_1 & 1+k_2 \\ 2+k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} tr(A+bk) = \lambda_1^* + \lambda_2^* \\ det(A+bk) = \lambda_1^* \lambda_2^* \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = -1 \\ (1+k_1)(-1+k_2) - (1+k_2)(2+k_1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = \begin{vmatrix} -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \end{vmatrix}$$

e) $u = ky = kx_1$ ⇝ NON è una retroazione a partire da TUTTO lo stato; pertanto il teorema sulla assegnabilità degli autovalori non è applicabile

$$\begin{matrix} \mathring{x}_1 = x_1 + x_2 + u \\ \mathring{x}_2 = 2x_1 - x_2 + u \end{matrix} \xrightarrow{u = kx_1} \begin{matrix} \mathring{x}_1 = x_1 + x_2 + kx_1 \\ \mathring{x}_2 = 2x_1 - x_2 + kx_1 \end{matrix} \rightarrow \mathring{x} = \tilde{A}x$$

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} 1+k & 1 \\ 2+k & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} tr(\tilde{A}) = k < 0 \\ det(\tilde{A}) = -2k-3 > 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{k < -3/2}$$

$\tilde{A}$ è A.S.

Tuttavia non sarà più possibile fissare ad arbitrio gli autovalori di $\tilde{A}$. Infatti,

$$\begin{matrix} \lambda_1^* + \lambda_2^* = k \\ \lambda_1^* \cdot \lambda_2^* = -2k-3 \end{matrix} \longrightarrow \lambda_1^* \lambda_2^* + 2(\lambda_1^* + \lambda_2^*) + 3 = 0$$

VINCOLO TRA GLI AUTOVALORI DI $\tilde{A}$

Dato il sistema $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

a) Studiarne la stabilità

b) Dire se è possibile stabilizzare il sistema con la legge di controllo $u = kx + v$

c) Determinare k tale che il sistema controllato annulli i transitori in tempo finito

---

a) $|tr(A)| = 5 > n = 2 \rightarrow$ INSTAB.

b) $R = |b \quad Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\det(R) \neq 0 \rightarrow$ CR $\Rightarrow$ SI perché

posso fissare a piacere gli autovalori λ_i^* di $A+bk$; in particolare posso scegliere $|\lambda_i^*| < 1 \rightarrow A+bk$ A.S.

c) Sistema controllato = sistema a memoria finita

$\Rightarrow \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$

$$A+bk = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} |k_1 \quad k_2| = \begin{vmatrix} 2+k_1 & -1+k_2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} tr(A+bk) = \lambda_1^* + \lambda_2^* \\ \det(A+bk) = \lambda_1^* \lambda_2^* \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5+k_1 = 0 \\ 3(2+k_1) + (k_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6+3k_1+k_2-1=0 \\ 3k_1+k_2 = -5 \\ -15+k_2 = -5 \\ k_2 = 10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k = |-5 \quad 10|$

Dato il sistema $\overset{\circ}{x} = Ax + bu$ $A = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = b$

a) verificare che è instabile

b) Dire se è possibile stabilizzarlo con $u = kx + v$

c) Valutare il tempo di risposta del sistema controllato

a) $\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 2 \longrightarrow$ INST

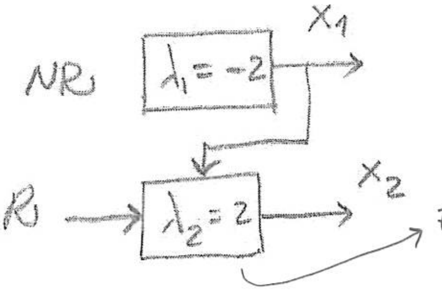
b) $R = |b \ \ Ab| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\det(R) = 0 \longrightarrow$ NON CR

$\begin{bmatrix} \text{rank}(R) = 1 \rightarrow \dim R \\ 2 - 1 = 1 \rightarrow \dim NR \end{bmatrix}$

Tuttavia
sarà possibile
stabilizzare il sistema se la parte NR è AS

$\overset{\circ}{x}_1 = -2x_1$

$\overset{\circ}{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + u$



Essendo questa parte di ordine 1 è sicuramente solo R

NR è A.S. ⇒ si potrà stabilizzare. lo verifico

$A + bk = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} |k_1 \ \ k_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1+k_1 & 2+k_2 \end{vmatrix}$

$\lambda_1^* = -2 \quad \lambda_2^* = 2 + k_2 \Rightarrow \forall k_1, \ k_2 < -2$ rende il sistema controllato A.S. cioè stabilizza il sistema dato

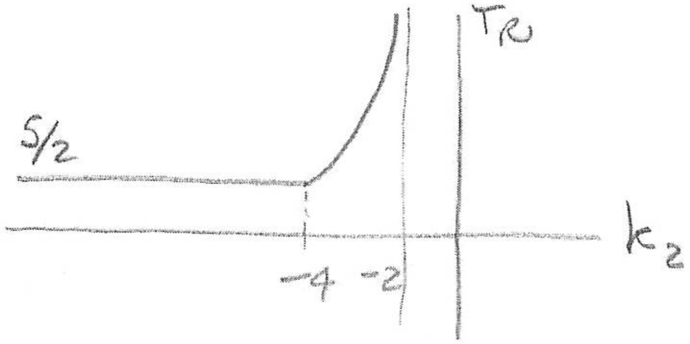
<u>NOTA</u> Poichè il sistema è NON CR non posso più fissare a piacere λ_i^* di A+bk. Infatti $\lambda_1^* = -2 \ \forall k$ (è l'autovalore della parte NR del sistema)

c) Se $\overset{\lambda_1^*}{-2} < \overbrace{2+k_2}^{\lambda_2^*} < 0 \rightarrow -4 < k_2 < -2$

$\lambda_D = \lambda_2^* \qquad T_D = -\frac{1}{2+k_2} \qquad T_R = -\frac{5}{2+k_2}$

Se $\overbrace{2+k_2}^{\lambda_2^*} < \overset{\lambda_1^*}{-2} \rightarrow k_2 < -4$ $\qquad \forall k_1$

$\lambda_D = \lambda_1^* = -2 \qquad T_D = \frac{1}{2} \qquad T_R = \frac{5}{2}$



Non potendo più fissare a piacere gli autovalori di A+bk, non sarà più possibile fissare a piacere T_R che infatti dovrà essere $\geq 5/2$.

Dato il sistema a tempo continuo $\dot{x} = Ax$ con $y = Cx$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

dire se è possibile ricostruire asintoticamente il suo stato a partire dalle rilevazioni di u e y. In caso affermativo si determini un possibile ricostruttore asintotico.

$$\theta = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \det\theta \neq 0 \rightarrow CO$$

Sì perché, essendo CO, è possibile fissare a piacere gli autovalori λ_i^* di $A + lc$ $\Rightarrow$ scegliendoli a $\mathrm{Re} < 0$ il ricostruttore è asintotico.

Determino $l \,/\, \lambda_1^* = \lambda_2^* = -1$

$$A + lc = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 + l_1 & 2 + l_1 \\ l_2 & 1 + l_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A + lc) = l_1 + l_2 = -2$$
$$\det(A + lc) = (-1 + l_1)(1 + l_2) - l_2(2 + l_1) = 1 \quad \rightarrow l = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Dato il sistema $x(t+1) = Ax(t)$ con $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$y(t) = cx(t)$

$c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$

progettare un ricostruttore asintotico dello stato che esaurisca i transitori in tempo finito.

$\theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ det $\theta \neq 0$ → CO ⇒ posso fissare a piacere λ_i^* di $(A+lc)$

⇒ ∃ ricostruttore asintotico dello stato con $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$ → i transitori si esauriscono in tempo finito ⇝ sistema a memoria finita

$$A + lc = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 + l_1 \\ -1 & 1 + l_2 \end{vmatrix}$$

$tr(A+lc) = 3 + l_2 = \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0$

$\det(A+lc) = 2(1+l_2) + (1+l_1) = \lambda_1^* \cdot \lambda_2^* = 0$

$l = \begin{vmatrix} 3 \\ -3 \end{vmatrix}$

Dato il sistema $\overset{\circ}{x} = Ax$, $y = Cx$ $\quad A = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$

dire se è possibile ricostruire asintoticamente lo stato (e con quale tempo di risposta) a partire dalle misure di u e y.

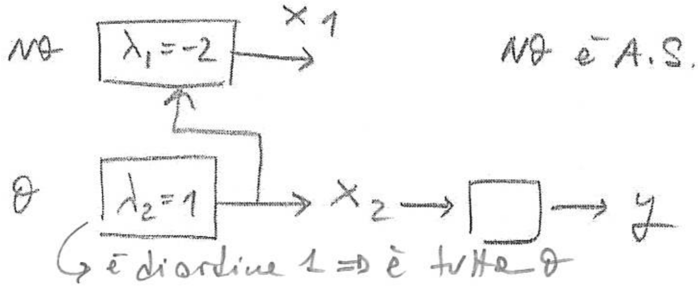
$\theta = \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad$ det $\theta = 0 \to$ NON θ

Tuttavia, se la parte Nθ è A.S., sarà comunque possibile ricostruire asintoticamente lo stato (senza dinamica arbitraria)

$\overset{\circ}{x}_1 = -2x_1 + x_2$

$\overset{\circ}{x}_2 = x_2$

$y = x_2$



↳ è di ordine 1 ⇒ è tutta θ

Nθ è A.S.

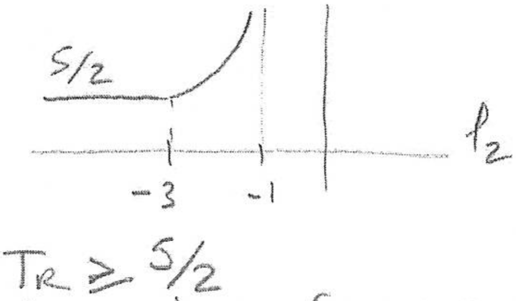
Nθ è A.S → si potrà ricostruire x. Lo verifico

$$A + lC = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1+l_1 \\ 0 & 1+l_2 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1^* = \underset{\uparrow}{-2} \quad \lambda_2^* = 1 + l_2$ $\qquad \forall l_1,\ l_2 < -1$ è possibile ricostruire asintoticamente x

è λ_1 di Nθ

- $-2 < 1 + l_2 < 0 \to -3 < l_2 < -1$
  $\lambda_D = 1 + l_2 \quad T_R = -\frac{5}{1+l_2}$
- $-2 > 1 + l_2 \to l_2 < -3$
  $\lambda_D = -2 \quad T_R = \frac{5}{2}$



$T_R \geq 5/2$

↳ errore di ricostruzione → 0