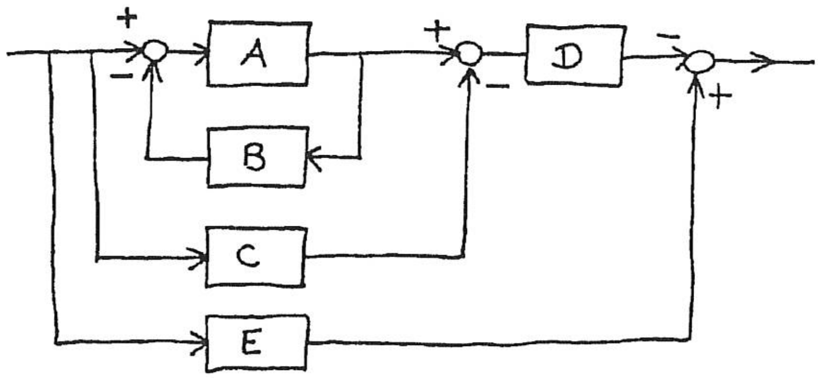
Si consideri il sistema *a tempo continuo* rappresentato in figura.



I blocchi A e B sono descritti dalle funzioni di trasferimento $G_A(s) = \dfrac{10}{s-1}$, $G_B(s) = \dfrac{s}{s-2}$, il blocco C è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_C + \dot{y}_C + 4y_C = -4\dot{u}_C + 2u_C$, il blocco E è descritto dal modello di stato

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Proporre arbitrariamente un blocco D di ordine 2 tale che il sistema aggregato sia asintoticamente stabile.
b) Utilizzando il blocco D proposto, determinare il tempo di risposta del sistema aggregato, discutendo anche l'eventuale presenza di oscillazioni nelle risposte ad ingresso costante.
c) Utilizzando il blocco D proposto, discutere la stabilità del sistema aggregato nel caso il modello ingresso/uscita del blocco C venga sostituito dal seguente:

$$\dddot{y}_C + \ddot{y}_C + \dot{y}_C + 4y_C = -4\dot{u}_C + 2u_C$$

NOTA : {poli} ≡ {λ} qui

a)

F = retroazione A–B

F, C, E, D sono aggregati con connessioni cascata/parallelo

⟹ il sistema è asint. stabile ⟺ F, C, D ed E sono asintoticamente stabili

(F) $G_F = \dfrac{G_A}{1+G_A G_B} = \dfrac{\frac{10}{s-1}}{1+\frac{10}{s-1}\,\frac{s}{s-2}} = \dfrac{10(s-2)}{s^2+7s+2}$

poli in $\dfrac{-7 \pm \sqrt{49-8}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} & \ominus \\ \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2} & \ominus \end{cases}$ F Asint. stab.

(C) $\Delta_c(s) = s^2 + s + 4$

poli in $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+i\sqrt{15}}{2} & \mathbb{R}e\,(-) \\ \dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2} & \mathbb{R}e\,(-) \end{cases}$ C Asint. stab.

(E) $\{\lambda\}_E = \{-1, -2, -1, -2\}$ E Asint. stabile

partizionata a blocchi

Quindi il sistema è asint. stab. $\Leftrightarrow$ D è asint. stabile

Per esempio $G_D = \dfrac{1}{(s+1)^2}$ ha poli in -1 e -1 ed è asint. stabile.

b) $\{\lambda\}_\Sigma = \sigma(\Sigma) = \sigma(F) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D) \cup \sigma(E)$

sistema aggregato

$$\sigma(F) = \{\underbrace{\frac{-7+\sqrt{41}}{2}, \frac{-7-\sqrt{41}}{2}}_{F}, \underbrace{\frac{-1+i\sqrt{15}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}}_{C}, \underbrace{-1, -1}_{D}, \underbrace{-1, -1, -2, -2}_{E}\}$$

$\lambda_D = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2} \longrightarrow T_D = -\dfrac{1}{\mathbb{R}e(\lambda_D)}$ e $T_R = 5T_D \simeq 16,7$

Poiché $\exists\, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ oscillazioni

c) $\Delta_c(s) = s^3 + s^2 + s + 4$ $\quad d_1 = 1 \quad d_2 = 1 \quad d_3 = 4$

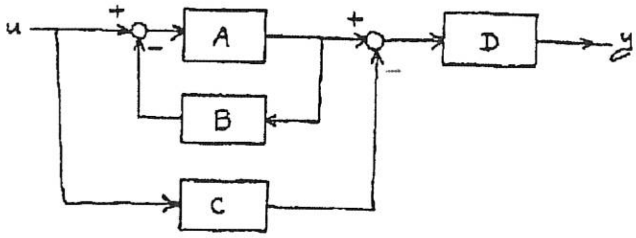
Hurwitz $H = \begin{vmatrix} d_1 & 1 & 0 \\ d_3 & d_2 & d_1 \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$D_1 = 2 > 0$

$D_2 = -3 < 0 \rightarrow$ C non As. stab $\Rightarrow \Sigma$ non è As. stab

(Hurwitz $n=3$: As. stab. $\Leftrightarrow d_i > 0\ \forall i$ e $d_1 d_2 > d_3$)

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A ha funzione di trasferimento $G_A(s)=\frac{1}{s-1}$, il blocco D è descritto dal modello I/O $\dot{y}_D+2y_D=-\dot{u}_D$, il blocco C dal modello di stato seguente:

$$A_C=\left|\begin{array}{c|cc} -1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right| \quad b_C=\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix} \quad c_C=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

A_{11} A_{22}

a) Proporre, per il blocco B, una qualunque funzione di trasferimento di ordine 1 che renda il sistema aggregato asintoticamente stabile (spiegando con cura perché l'aggregato risulta asintoticamente stabile).

c) Con il blocco B prima proposto, determinare TUTTE le costanti di tempo del sistema aggregato e quindi il suo tempo di risposta.

a) R = retroazione A-B

R, C e D sono connessi in cascata/parallelo.

Pertanto Σ è asint. stabile $\Leftrightarrow$ R, C e D sono asint. stab.

C $\quad \det(\lambda I - A_{22}) = \det\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 \\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda+1)^2+1 = \lambda^2+2\lambda+2=0$

$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$\{\lambda\}_{A_C} = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}} = \{-1, -1+i, -1-i\} \Rightarrow$ C è asintot. stabile

D $\quad \Delta_D(s) = s+2$ polo in $-2 \Rightarrow$ D è asint. stab.

$B(s) = \frac{\alpha}{\beta+s}$ con α e β / R sia asint. stab.

$$G_R(s) = \frac{G_A(s)}{1+G_A(s)G_B(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{1}{s-1}\,\frac{\alpha}{s+\beta}} = \frac{s+\beta}{s^2+(\beta-1)s+(\alpha-\beta)}$$

$\Rightarrow$ deve essere $\beta-1>0 \Rightarrow \beta>1$

$\alpha-\beta>0 \Rightarrow \alpha>\beta$

Ad esempio $\begin{matrix} \alpha = 9 \\ \beta = 5 \end{matrix} \rightarrow G_R(s) = \dfrac{s+5}{s^2+4s+4} = \dfrac{s+5}{(s+2)^2}$

che ha poli in $-2, -2$.

b) $\sigma(\Sigma) = \sigma(R) \cup \sigma(C) \cup \sigma(D)$

$$\sigma(\Sigma) = \{\underbrace{-2, -2}_{R}, \underbrace{-1, -1+i, -1-i}_{C}, \underset{\downarrow}{-2}\}$$

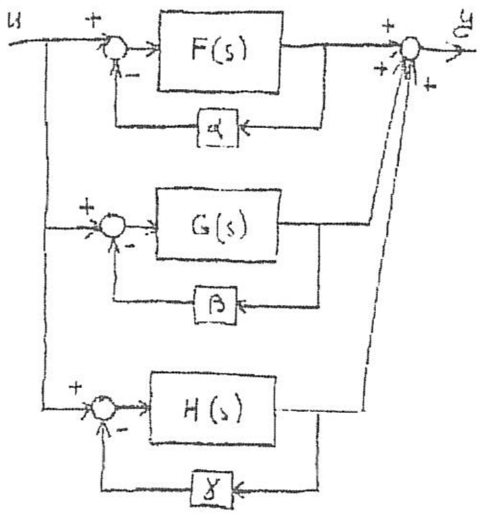
$$T = \left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1, 1, \tfrac{1}{2}\right\}$$

$T_D = 1$ e $T_R = 5T_D = 5$

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui

$$F(s)=\frac{1}{s-1}$$
$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s-2}$$
$$H(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+2s-1}$$

mentre α, β, γ sono coefficienti reali.



a) Determinare, motivando adeguatamente la risposta, per quali valori della terna (α, β, γ) il sistema in figura è asintoticamente stabile.
b) Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione di F, G, H, α, β, γ.

a) R_F = retroazione $F-\alpha$
R_G = " $G-\beta$
R_H = " $H-\gamma$

R_F, R_G e R_H sono connessi in parallelo
Pertanto Σ è asint. stab. $\Leftrightarrow$ lo sono R_F, R_G e R_H

$$R_F=\frac{F}{1+\alpha F}=\frac{\frac{1}{s-1}}{1+\frac{\alpha}{s-1}}=\frac{1}{s-1+\alpha}\qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \alpha>1$$

$$R_G=\frac{G}{1+\beta G}=\frac{1}{s^2+2s-2+\beta}\qquad \text{as. stab} \Leftrightarrow \beta>2$$

$$R_H=\frac{H}{1+\gamma H}=\frac{1}{s^3+2s^2+2s-1+\gamma}\qquad \text{as stab.} \underset{\text{HURWITZ}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}-1+\gamma>0\\ 4>-1+\gamma\end{cases}$$

cioè $1<\gamma<5$

$$\text{Pertanto } \Sigma \text{ è as. stab} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>1\\ \beta>2\\ 1<\gamma<5\end{cases}$$

b) $$R_{TOT}=R_F+R_G+R_H=\frac{F}{1+\alpha F}+\frac{G}{1+\beta G}+\frac{H}{1+\gamma H}$$

Nel seguente sistema a tempo continuo di ordine 1, $x(t)$ rappresenta la frazione (rispetto al totale della popolazione) di acquirenti di un certo prodotto ($0 \le x(t) \le 1$). La creazione di nuovi acquirenti avviene per "contagio" (passa-parola) tra gli acquirenti x e i non acquirenti $(1-x)$.

$$\dot{x} = -x + px(1-x)$$

a) Determinare, per <u>tutti</u> i $p > 0$, gli stati di equilibrio del sistema e rappresentarli in un piano (p, x).
b) Discutere, per <u>tutti</u> i $p > 0$, la stabilità degli stati di equilibrio determinati al punto a).

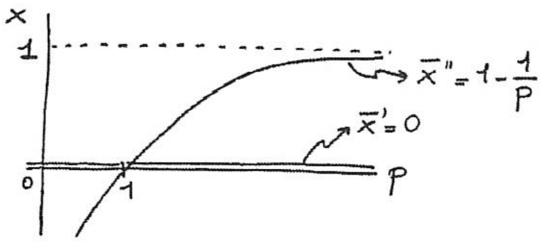
Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) calcolo equilibri:

$\dot{x} = 0 \Rightarrow -x + px(1-x) = 0$

$\hookrightarrow \bar{x}' = 0$

$-1 + p(1-x) = 0 \rightarrow \bar{x}'' = 1 - \frac{1}{p}$, $\bar{x}'' > 0$ se $p > 1$



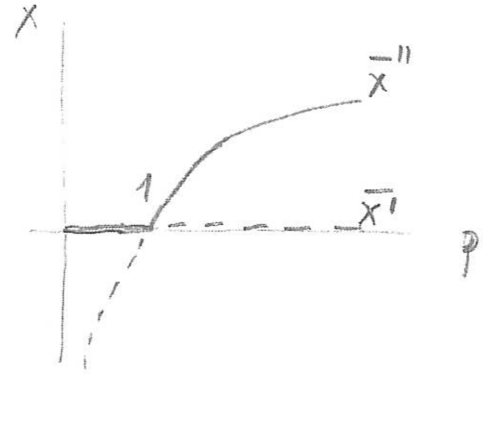
b) Jacobiano: $J = \frac{\partial f}{\partial x} = -1 + p - 2px$

$J|_{\bar{x}'=0} = -1 + p$, asint. stabile se $p < 1$, instabile se $p > 1$

$J|_{\bar{x}''=1-\frac{1}{p}} = 1 - p$, instabile se $p < 1$, asint. stabile se $p > 1$

Per $p = 1$: $\bar{x}' = \bar{x}'' = 0$, ma $J|_{\bar{x}'} = J|_{\bar{x}''} = 0$ non permette di discutere la stabilità;

Per $p = 1$ il sistema diventa: $\dot{x} = -x^2$, quindi $x \to 0$ se $x(0) > 0$ ma $x \to -\infty$ se $x(0) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile.



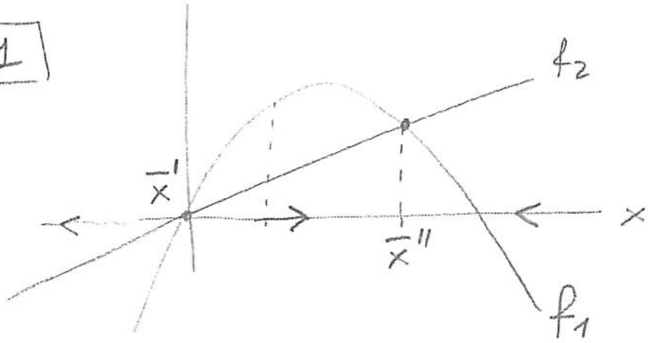
—— stab asint.
- - - INSTAB

In alternativa, posso studiare la stabilità col "metodo grafico".

$$\mathring{x} = px(1-x) - x = f_1(x) - f_2(x) \qquad f_1 = px(1-x) \qquad f_2 = x \qquad p>0$$

Equilibrio $\mathring{x} = 0 \rightarrow f_1 = f_2$

$\boxed{p>1}$



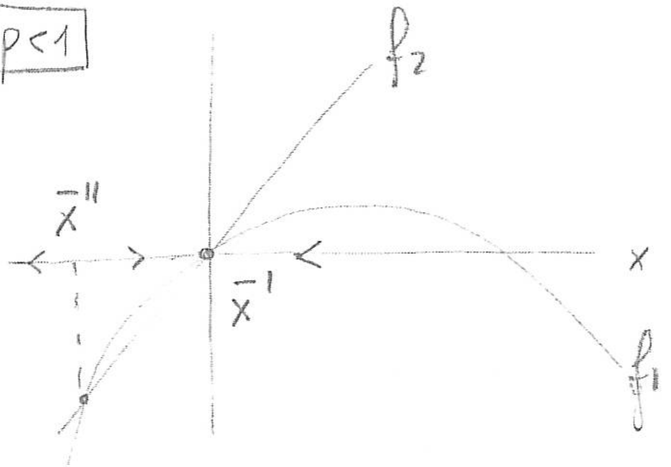
$\bar{x}' < x(0) < \bar{x}''$ $\quad f_1 > f_2 \quad \mathring{x} > 0$

$x(0) > \bar{x}''$ $\quad f_2 > f_1 \quad \mathring{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}'$ $\quad f_2 > f_1 \quad \mathring{x} < 0$

$\Rightarrow$ $\bar{x}'$ INST
$\bar{x}''$ A.S.

$\boxed{p<1}$



$x(0) > \bar{x}'$ $\quad f_2 > f_1 \quad \mathring{x} < 0$

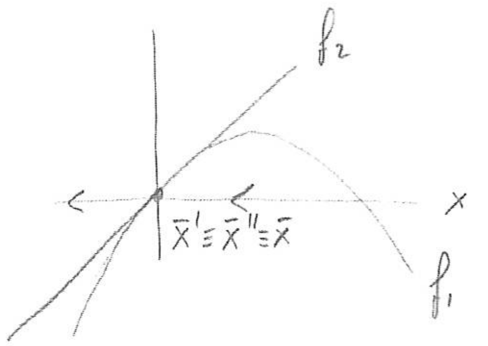
$x(0) < \bar{x}''$ $\quad f_2 > f_1 \quad \mathring{x} < 0$

$\bar{x}'' < x(0) < \bar{x}'$ $\quad f_1 > f_2 \quad \mathring{x} > 0$

$\Downarrow$

$\bar{x}'$ A.S.
$\bar{x}''$ INST

$\boxed{p=1}$



$x(0) > \bar{x}$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0 \Rightarrow \bar{x}$ INST

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo di ordine $n = 1$:

$\dot{x} = x - x^2 - p$,

dove $-\infty < p < \infty$ è un parametro reale.

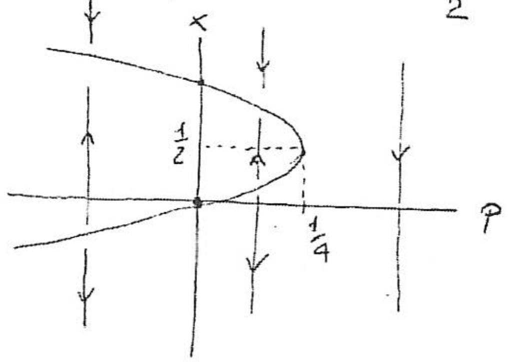
a) Determinare gli stati di equilibrio del sistema in funzione di p e rappresentarli nel piano (p, x).
b) Studiare la stabilità degli equilibri per ogni valore di p, utilizzando quando possibile il metodo di linearizzazione.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

(3) SOLUZIONE (traccia)

(a) $x^2 - x + p = 0$ $\qquad \bar{x} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}$

- 2 equilibri per $p < \frac{1}{4}$
- 1 equilibrio per $p = \frac{1}{4}$
- $\nexists$ equilibri per $p > \frac{1}{4}$



$p = \frac{1}{4} \rightarrow \bar{x} = \frac{1}{2}$

$p = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$ e $\bar{x} = 1$

(b) $J = 1 - 2x = 1 - 2\,\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4p}}{2} = \mp\sqrt{1-4p}$

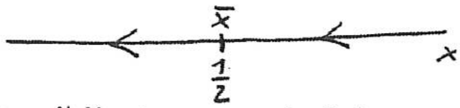
(ramo super.) $\bar{x} = \dfrac{1 + \sqrt{1-4p}}{2} \Longrightarrow J = -\sqrt{1-4p}$, as. stabile

(ramo inf.) $\bar{x} = \dfrac{1 - \sqrt{1-4p}}{2} \Longrightarrow J = +\sqrt{1-4p}$, instabile

equilibri per $p < 1/4$

Per $p = 1/4$: $\quad \dot{x} = x - x^2 - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Quindi $\dot{x} < 0 \quad \forall x \neq \bar{x} = \frac{1}{2}$:

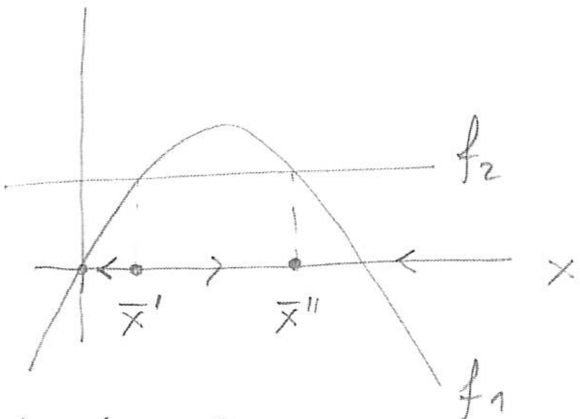


$\Rightarrow$ l'equilibrio è <u>instabile</u>

In alternativa, si può studiare la stabilità degli equilibri con metodo grafico

$$\dot{x} = x - x^2 - p = f_1 - f_2 \quad \text{con} \quad f_1 = x - x^2$$
$$f_2 = p$$

$p < \frac{1}{4}$

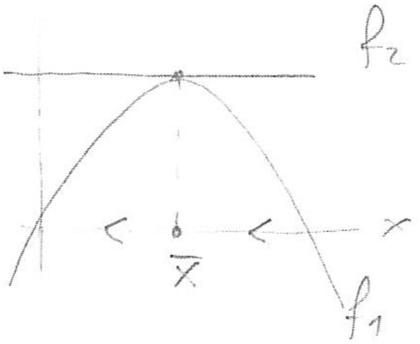


$x(0) > \bar{x}''$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}'$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$ $\quad \Longrightarrow \quad \bar{x}''$ A.S.

$\bar{x}' < x(0) < \bar{x}''$ $\quad f_2 < f_1 \quad \dot{x} > 0$ $\quad \bar{x}'$ INST

$p = \frac{1}{4}$



$x(0) > \bar{x}$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$

$x(0) < \bar{x}$ $\quad f_2 > f_1 \quad \dot{x} < 0$ $\quad \longrightarrow \quad \bar{x}$ INST

Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo di ordine $n = 2$:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1$$
$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_2^3 - x_1$$

Determinare gli stati di equilibrio del sistema e studiarne la stabilità con il metodo della linearizzazione

---

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

equilibri: $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ 2x_2 - x_2^3 - x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \bar{x}''' = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$

Jacobiano $A(x) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2-3x_2^2 \end{vmatrix}$

(tc, $n=2$ → uso il criterio tr/det)

$A(\bar{x}') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \text{tr}A > 0 \\ \det A < 0 \end{matrix}\right\}$ $\bar{x}'$ INSTABILE

$A(\bar{x}'') = A(\bar{x}''') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ $\left.\begin{matrix} \text{tr}A < 0 \\ \det A > 0 \end{matrix}\right\}$ $\bar{x}'', \bar{x}'''$ ASINT. STABILI

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x} = 2(x - y)$$
$$\dot{y} = x^2 - 4x - y$$

a) Determinare gli stati di equilibrio.
b) Studiarne la stabilità mediante linearizzazione.

a) $\begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ y = x^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 5 \\ 5 \end{vmatrix}$

b) $J = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2x-4 & -1 \end{vmatrix}$

$J(\bar{x}') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad \lambda^2 - \lambda - 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \cong \begin{matrix} \nearrow 3.70 \\ \searrow -2.70 \end{matrix}$ INSTABILE

$J(\bar{x}'') = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$ $\qquad \lambda^2 - \lambda + 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-40}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{39}}{2}$ INSTABILE

Dato il sistema

$$\dot{x} = -y - 2x + x^3$$
$$\dot{y} = y - px$$

determinarne gli equilibri e studiarne la stabilità al variare di p con il metodo della linearizzazione.

Equilibri

$\dot{x} = 0 \rightarrow -y - 2x + x^3 = 0 \rightarrow -px - 2x + x^3 = 0$

$\dot{y} = 0 \rightarrow y = px$

$x(-p - 2 + x^2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2+p} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p \geq -2 \end{cases}$

- $p \leq -2 \qquad A(0,0)$
- $p > -2 \qquad A(0,0) \qquad B(\sqrt{2+p},\ p\sqrt{2+p}) \qquad C(-\sqrt{2+p},\ -p\sqrt{2+p})$

stabilità

$$J = \begin{vmatrix} -2+3x^2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$J_A = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr = -1 < 0 \\ det = -(2+p) \end{array} \begin{cases} p > -2 & det < 0 \quad \text{instab.} \\ p < -2 & det > 0 \quad \text{stabile asint.} \\ p = -2 & det = 0 \quad \exists\lambda = 0 \quad ? \end{cases}$

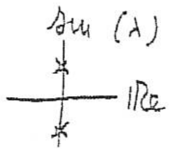
$$J_{B,C} = \begin{vmatrix} 4+3p & -1 \\ -p & 1 \end{vmatrix}$$

$tr = 5 + 3p$

$det = 2(2+p) > 0$ essendo $p > -2$ in B e C

$-2 < p < -5/3 \Rightarrow tr < 0 \rightarrow$ stabile asint

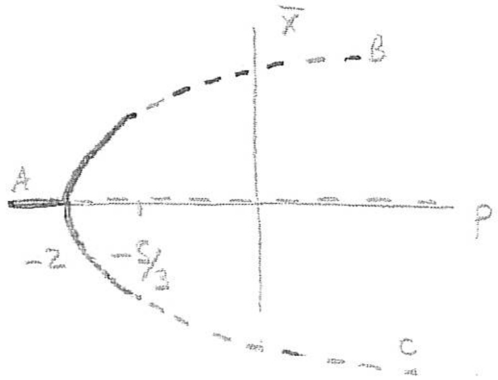
$p > -5/3 \rightarrow tr > 0 \rightarrow$ instabile

$p = -5/3 \rightarrow tr = 0$ e $det > 0 \Rightarrow$ 

$\mathrm{Re}(\lambda) = 0$?

Complessivamente si ha:

	A	B	C
$p < -2$	Asint. stabile	/	/
$-2 < p < -5/3$	Instab.	Asint. stab.	Asint stab.
$p > -5/3$	Instab	Instab	Instab



Graficamente

—— = EQ. STABILE ASINT.
- - - = EQ. INSTABILE

$p = -2$ e $p = -5/3$ sono punti di biforcazione