Il ciclo di vita delle meduse può essere suddiviso in tre fasi: fase larvoidale, fase polipoidale e fase medusoidale. La riproduzione è possibile solo nella fase medusoidale; tuttavia, per deporre le uova, le meduse sono costrette a lacerare esombrella ed ectoderma, causando così la morte dell'individuo (le meduse sono animali sempelpari).
La probabilità di sopravvivenza alla predazione allo stato larvoidale è del 10% mentre allo stato polipoidale è dell'8% stima inoltre che nell'atto riproduttivo la medusa rilasci circa 1000 uova di cui ne vengono fecondate il 10% (sopravvivenza delle uova alla predazione).
Si proponga un modello dinamico per studiare il ciclo di vita delle meduse e si dica se, con i dati forniti, la popolazione di meduse è destinata all'estinzione o all'invasione.
Nel caso di estinzione, si valuti il livello di sopravvivenza delle uova alla predazione che porta all'invasione della specie.

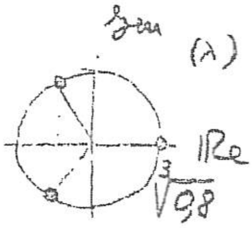
$x_1(t) = \#$ meduse in fase larvoidale
$x_2(t) = \#$ meduse in fase polipoidale
$x_3(t) = \#$ meduse in fase medusoidale

$$x_1(t+1) = 0{,}1 \cdot 1000\, x_3(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}08\, x_2(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 100 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 \end{vmatrix}$$

$\hookrightarrow$ solo movimento libero poiché $\nexists\, u(t)$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -100 \\ -0{,}1 & \lambda & 0 \\ 0 & -0{,}08 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 0{,}8 = 0$$



$$\{\lambda\}_A = \left\{ \sqrt[3]{0{,}8}\ ;\ \sqrt[3]{0{,}8}\left[-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right];\ \sqrt[3]{0{,}8}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \right\}$$

$$|\lambda_i| = \sqrt[3]{0{,}8} < 1 \quad \forall i \Rightarrow \text{As. stabilità} \Rightarrow x(t) \to 0 \quad \forall x(0)$$

cioè la specie è destinata all'estinzione

p = sopravvivenza delle uova alla predazione

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1000p \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}08 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \to \lambda^3 = 8p \to |\lambda| = \sqrt[3]{8p}$$

Invasione $\Rightarrow$ instabilità $\Rightarrow |\lambda| > 1 \Rightarrow 8p > 1 \Rightarrow p > \frac{1}{8}$.
$\Updownarrow$
($x(0) \neq 0$ piccolo $\Rightarrow x(t) \to \infty$)

1) Una società di noleggio auto affitta vetture alle aziende con le formule del Noleggio di durata Mensile (NM) o Bimestrale (NB). All'inizio di ciascun mese t vengono date in affitto $u(t)$ vetture, di cui 2/3 con la formula NM e 1/3 con la formula NB. L'importo dell'affitto è riscosso posticipatamente: α euro al termine del noleggio NM, e β euro al termine di ciascun mese del noleggio NB.

a) Si descriva l'evoluzione nel tempo delle auto affittate mediante un sistema dinamico a tempo discreto, definendo come variabile di uscita $y(t)$ l'affitto complessivo riscosso all'istante t.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $x_1(t)$ = n. auto in NM da 1 mese
$x_2(t)$ = " " NB da 1 mese
$x_3(t)$ = " " NB da 2 mesi

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{2}{3} u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{3} u(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \beta \end{vmatrix}$$

$$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \beta x_3(t)$$

b) $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$
$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow A$ asintoticamente stabile
sistema a memoria finita (FIR) : $T_R \leq n = 3$
non vi sono aut. complessi o reali negativi
$\Rightarrow$ no oscillazioni

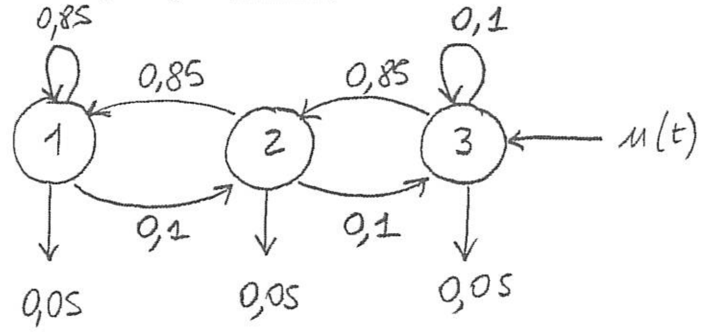
1) Gli abbonati a un servizio di "car sharing" sono suddivisi in tre categorie a cui corrispondono diverse tariffe di abbonamento, crescenti dalla cat. 1 alla cat. 3. Il gestore vuole incentivare l'uso moderato dei veicoli, per cui a fine anno promuove alla categoria inferiore (da 3 a 2, o da 2 a 1) l'utente che nell'anno non abbia superato una certa soglia di utilizzo, mentre declassa alla categoria superiore (da 1 a 2, o da 2 a 3) l'utente sopra soglia. Tutti i nuovi abbonati sono comunque inseriti in cat. 3.

In base alle statistiche di utilizzo degli ultimi anni, è noto che il 10% degli utenti di ogni categoria ha un utilizzo sopra soglia. Inoltre, un ulteriore 5% non rinnova l'abbonamento a fine anno e lascia il servizio.

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico, nel quale l'ingresso rappresenti il numero di nuovi abbonati e l'uscita il numero di abbonati di cat. 1.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta.
c) Determinare lo stato di equilibrio corrispondente a 1000 nuovi abbonati all'anno.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)



$x_i(t)$ = # abbonati in categoria i $(i = 1,2,3)$ nell'anno t

$$x_1(t+1) = 0{,}85\, x_1(t) + 0{,}85\, x_2(t)$$

$$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}85\, x_3(t)$$

$$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}1\, x_3(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

b)

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}85 & 0{,}85 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}85 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{vmatrix}$$

Il sistema è positivo

Tutte le colonne sommano a $0{,}95 \Rightarrow \lambda_D = 0{,}95$ e il sistema è A. S.

$$T_R = -\frac{5}{\ln(0{,}95)} \simeq 95{,}5 \text{ anni}$$

c) $x_1 = 0{,}85\, x_1 + 0{,}85\, x_2 \rightarrow x_1 = 5{,}67\, x_2$

$x_2 = 0{,}1\, x_1 + 0{,}85\, x_3 \longrightarrow x_2 = 0{,}567\, x_2 + 0{,}85\, x_3 \rightarrow x_2 = 1{,}96\, x_3$

$x_3 = 0{,}1\, x_2 + 0{,}1\, x_3 + u \rightarrow x_3 = 0{,}196\, x_3 + 0{,}1\, x_3 + u$

$\hookrightarrow x_3 = 1{,}42\, u$

$\bar{u} = 1000$

$$\bar{X} = \begin{vmatrix} 15781 \\ 2783 \\ 1420 \end{vmatrix}$$

Sul pianeta Terno ogni individuo muore subito dopo avere compiuto tre anni di vita. Nel primo anno di vita ogni individuo lavora e versa un contributo di α euro alla cassa previdenziale; inoltre genera (mediamente) 0.5 figli subito dopo aver compiuto un anno. Nel secondo anno di vita ciascun individuo lavora e versa un contributo di 2α euro alla cassa previdenziale. Infine, nel terzo anno di vita, ogni individuo gode di una pensione di β euro. Ogni anno, inoltre, immigrano su Terno 200 neonati, che vengono quindi messi subito al lavoro.

a) Descrivere con un modello matematico l'evoluzione della popolazione, indicando con $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ il numero di individui che, all'inizio dell'anno t, compiono 1, 2 e 3 anni.

b) Determinare l'equilibrio del sistema dinamico ottenuto al punto a) e studiarne la stabilità.

c) Sia $x_4(t)$ il livello della cassa previdenziale all'inizio dell'anno t. Scrivere l'equazione che regola la dinamica di $x_4(t)$ (cioè $x_4(t+1) = \dots$) ipotizzando che il tasso di interesse sia pari al 10%.

d) Determinare il valore di equilibrio di $x_4(t)$.

a) $x_1(t+1) = 0{,}5\, x_1(t) + \bar{u}$ $\quad (\bar{u} = 200)$

$x_2(t+1) = x_1(t)$

$x_3(t+1) = x_2(t)$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

b) $\bar{x}_1 = 0{,}5\,\bar{x}_1 + \bar{u} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{u}{0{,}5} = 400$

$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 = 400$

$\bar{x}_3 = \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_3 = 400$

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{vmatrix}$$

$\{\lambda\}_A = \{0{,}5; 0; 0\}$ $\quad \forall i\, |\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ As. stabilità

$\lambda_D = 0{,}5 \Rightarrow T_D = -\frac{1}{\ln 0{,}5}$ e $T_R = 5T_D \simeq 7{,}21$

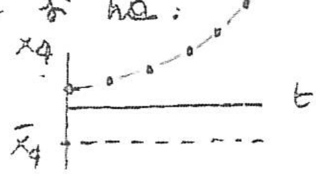
c) $x_4(t+1) = 1{,}1\, x_4(t) + \alpha x_1(t+1) + 2\alpha x_2(t+1) - \beta x_3(t+1)$ $\quad (*)$

$\Rightarrow x_4(t+1) = 1{,}1\, x_4(t) + 2{,}5\alpha\, x_1(t) - \beta x_2(t) + \alpha u(t)$

d) $(*) \rightarrow \bar{x}_4 = 1{,}1\,\bar{x}_4 + \alpha\bar{x}_1 + 2\alpha\bar{x}_2 - \beta\bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_4 = 4000(\beta - 3\alpha)$

NOTA: Per $n = 4$ il sistema è instabile ($\exists\, \lambda = 1{,}1$). In particolare, se x_1, x_2 e x_3 sono all'equilibrio, la cassa x_4 è instabile e si ha:

- $\beta < 3\alpha \rightarrow \bar{x}_4 < 0$



- $\beta > 3\alpha \rightarrow \bar{x}_4 > 0$

Pensioni troppo alte $\Rightarrow$ la cassa può fallire