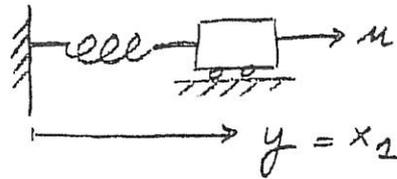


Determinare il modello ingresso/uscita del sistema meccanico rappresentato in figura esprimendolo come equazione differenziale e funzione di trasferimento.

Calcolare infine l'equilibrio, gli zeri, i poli e il guadagno del sistema.



$m$  = massa del carrello

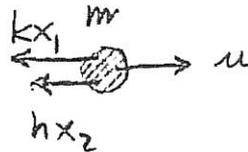
$k$  = costante elastica della molla lineare

$h$  = coefficiente di attrito viscoso

$x_1$  = posizione

$x_2$  = velocità

$y$  = posizione



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} [u - kx_1 - hx_2]$$

$$y = x_1$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_2 \\ \Delta x_2 &= \frac{1}{m} [u - kx_1 - hx_2] \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$s^2 x_1 = \frac{1}{m} [u - kx_1 - sx_1]$$

$$(ms^2 + hs + k)y = u$$

$$N(s) = 1 \quad D(s) = ms^2 + hs + k$$

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = u$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + hs + k}$$

Equilibrio

$$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}/k$$

$$\bar{y} = \bar{u}/k \rightarrow \bar{y} = G(0)\bar{u} = \frac{1}{k}\bar{u}$$

zeri  $\cancel{z}$

poli

$$ms^2 + hs + k = 0 \rightarrow p_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - 4mk}}{2m}$$

{poli} = { $\lambda$ } essendo

il grado (D) = n = 2

guadagno

$$M = G(0) = 1/k$$

### Osservazione 1

Cambiando variabile di uscita cambia il modello I/O.

Se, ad esempio,  $y = x_2 \rightarrow$  con calcoli analoghi si ottiene

$$(ms^2 + hs + k)y = su$$

$$N(s) = 1$$

$$D(s) = ms^2 + hs + k$$

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = \dot{u}$$

$$G(s) = \frac{s}{ms^2 + hs + k}$$

zero in  $s=0$  e  $\mu = G(0) = 0$

### Osservazione 2

In questo esempio è possibile ottenere il modello I/O senza passare attraverso il modello interno del sistema meccanico.

$$m \cdot (\text{accel}) = \sum (\text{forze applicate})$$

$$y = \text{posizione} \rightarrow \dot{y} = \text{velocità} \rightarrow \ddot{y} = \text{accelerazione}$$

$$\begin{array}{l} \text{forze applicate} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{forza di attrito} = h(\text{velocità}) = h\dot{y} \\ \text{forza elastica} = k(\text{allungamento}) = ky \end{array} \right. \end{array}$$

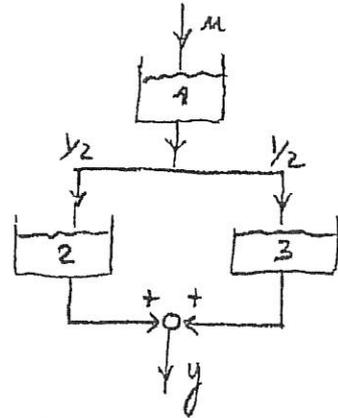
$$\text{Da cui} \quad m\ddot{y} = u - h\dot{y} - ky$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + h\dot{y} + ky = u$$

Determinare il modello ingresso/uscita della rete idrica rappresentata in figura ( $k_i =$  costante di deflusso del serbatoio  $i$ -esimo ( $i = 1, 2, 3$ )) nell'ipotesi che i serbatoi 2 e 3 siano differenti ( $k_2 \neq k_3$ ).

Si esprima tale modello <sup>come</sup> come equazione differenziale e funzione di trasferimento.

Supponendo ora che i serbatoi 2 e 3 siano identici ( $k_2 = k_3$ ), valutare la funzione di trasferimento e commentare.



$x_i =$  volume di invaso del serbatoio  $i$ -esimo

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3$$

$$y = k_2 x_2 + k_3 x_3$$

↓

$$\Delta x_1 = u - k_1 x_1$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_2 x_2$$

$$\Delta x_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1 - k_3 x_3$$

$$y = k_2 x_2 + k_3 x_3$$

$$(\Delta + k_1) x_1 = u$$

$$\rightarrow (\Delta + k_2) x_2 = \frac{1}{2} k_1 x_1$$

$$(\Delta + k_3) x_3 = \frac{1}{2} k_1 x_1$$

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} k_1 & -k_2 & 0 \\ \frac{1}{2} k_1 & 0 & -k_3 \end{vmatrix}$$

$$\{\lambda\}_A = \{-k_1, -k_2, -k_3\}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{(\Delta + k_1)(\Delta + k_2)} u \quad x_3 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{(\Delta + k_1)(\Delta + k_3)} u$$

$$y = \frac{1}{2} \left[ \frac{k_1 k_2}{(\Delta + k_1)(\Delta + k_2)} + \frac{k_1 k_3}{(\Delta + k_1)(\Delta + k_3)} \right] u$$

$$y = \frac{1}{2} k_1 \frac{(k_2 + k_3) \Delta + 2 k_2 k_3}{(\Delta + k_1)(\Delta + k_2)(\Delta + k_3)} u$$

$$\underbrace{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)}_{D(s)} y = \underbrace{\frac{1}{2} k_1 [(k_2+k_3)s + 2k_2k_3]}_{N(s)} u$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (k_1+k_2+k_3)\dot{y} + (k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3)y + k_1k_2k_3y &= \\ = \frac{1}{2}k_1(k_2+k_3)\dot{u} + k_1k_2k_3u \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}k_1 (k_2+k_3)s + 2k_2k_3}{(s+k_1)(s+k_2)(s+k_3)} \quad (\square)$$

NOTA poli in  $-k_1, -k_2, -k_3 \Rightarrow \{\text{poli}\} \equiv \{1\}$

$k_2=k_3=k \Rightarrow \exists$  simmetria nella rete idrica.

Ponendo  $k_2=k_3=k$  nella  $(\square)$  si ottiene:

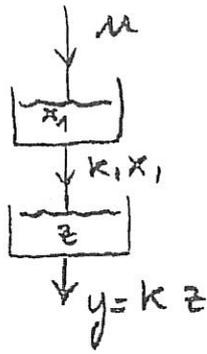
$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}k_1 (2ks + 2k^2)}{(s+k_1)(s+k)^2} = \frac{\frac{1}{2}k_1 \cancel{2k}(s+k)}{(s+k_1)(s+k)^{\cancel{2}}}$$

$$G(s) = \frac{k_1 k}{(s+k_1)(s+k)}$$

Il grado (denominatore di  $G(s)$ ) =  $2 < n = 3$   
a causa della simmetria della rete idrica

Infatti questa è la stessa  $G(s)$  che si  
otterrebbe sostituendo i due serbatoi in  
parallelo con un unico serbatoio di volume

$$z = x_2 + x_3$$



$$z = x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_1 = u - k_1 x_1$$

$$\dot{z} = k_1 x_1 - k z$$

$$y = k z$$

$$\begin{aligned} (\sigma + k_1) x_1 &= u \\ (\sigma + k) z &= k_1 x_1 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sigma + k_1} u \\ z &= \frac{k_1}{(\sigma + k)(\sigma + k_1)} u \end{aligned}$$

$$y = k z = \frac{k k_1}{(\sigma + k)(\sigma + k_1)} u$$

da cui  $G(s) = \frac{k k_1}{(\sigma + k)(\sigma + k_1)}$

I finanziamenti concessi da una certa banca alle imprese sono classificati in tre categorie:

1 = elevata affidabilità

2 = media affidabilità

3 = scarsa affidabilità

Ogni anno, in base alle informazioni sulla solidità delle imprese, una frazione  $\alpha_{ij}$  dei finanziamenti di categoria  $i$  viene classificata in categoria  $j$ , mentre un'ulteriore frazione  $\beta_i$  diviene parte delle "sofferenze" (finanziamenti non più riscuotibili). Infine, ogni anno  $t$  la banca concede nuovi prestiti per un ammontare  $u(t)$ , esclusivamente di categoria 1.

I valori dei coefficienti sono i seguenti:

$$\alpha_{11} = 0.8, \alpha_{12} = 0.1, \alpha_{22} = 0.7, \alpha_{23} = 0.2, \alpha_{33} = 0.9, \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$$

$$\beta_1 = 0, \beta_2 = 0.05, \beta_3 = 0.1$$

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui  $y(t)$  rappresenti l'ammontare delle nuove sofferenze nell'anno  $t$ .

b) Determinare il modello I/O del sistema.

c) Determinare (utilizzando il modello I/O) l'ammontare delle nuove sofferenze annue all'equilibrio se  $u(t) = 100$ .

a)  $x_i(t)$  = ammontare dei prestiti in categoria  $i$  nell'anno  $t$   
 $i = 1, 2, 3$

$$x_1(t+1) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{21} x_2(t) + \alpha_{31} x_3(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = \alpha_{12} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + \alpha_{32} x_3(t)$$

$$x_3(t+1) = \alpha_{13} x_1(t) + \alpha_{23} x_2(t) + \alpha_{33} x_3(t)$$

$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \beta_3 x_3(t)$$

$$\Rightarrow x_1(t+1) = 0.8 x_1(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.1 x_1(t) + 0.7 x_2(t)$$

$$x_3(t+1) = 0.2 x_2(t) + 0.9 x_3(t)$$

$$y(t) = 0.05 x_2(t) + 0.1 x_3(t)$$

$$A = \left| \begin{array}{ccc|c} 0.8 & 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 \end{array} \right| = b$$

$$c = | 0 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad | \quad d = 0$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad z x_1 &= 0,8 x_1 + \mu & (z-0,8) x_1 &= \mu \\
 z x_2 &= 0,1 x_1 + 0,7 x_2 & \rightarrow (z-0,7) x_2 &= 0,1 x_1 \\
 z x_3 &= 0,2 x_2 + 0,9 x_3 & (z-0,9) x_3 &= 0,2 x_2 \\
 y &= 0,05 x_2 + 0,1 x_3
 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{1}{z-0,8} \mu$$

$$x_2 = \frac{0,1}{z-0,7} x_1 = \frac{0,1}{(z-0,8)(z-0,7)} \mu$$

$$x_3 = \frac{0,2}{z-0,9} x_2 = \frac{0,02}{(z-0,7)(z-0,8)(z-0,9)} \mu$$

$$y = \frac{0,005(z-0,9) + 0,002}{(z-0,7)(z-0,8)(z-0,9)} \mu$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{G(z)}$

$$c) \quad \bar{y} = G(1) \bar{\mu}$$

$$G(1) = \frac{0,005 \cdot 0,1 + 0,002}{0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1} \approx 0,4167$$

$$\bar{\mu} = 100$$

$$\Rightarrow \bar{y} \approx 41,67$$

Una società finanziaria, all'inizio di ogni mese eroga nuovi prestiti di durata quadrimestrale, riscuote l'interesse su prestiti esistenti nella misura dell'1 % dell'ammontare del prestito, incassa il rimborso dei prestiti giunti a scadenza, classifica come "persi" in media il 2% dei prestiti esistenti. Questi non daranno più luogo a interessi e non saranno riscuotibili alla scadenza.

Descrivere tale attività mediante un modello matematico (interno ed esterno), in cui l'ingresso rappresenta l'ammontare dei nuovi prestiti erogati all'inizio del mese e l'uscita l'ammontare degli interessi riscossi.

Se, a partire da  $t=0$ , ogni mese i nuovi prestiti erogati ammontano a 100000 €, calcolare l'ammontare mensile degli interessi riscossi a regime.

$x_i(t)$  = ammontare dei prestiti erogati da  $i$  mesi all'inizio del mese  $t$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$x_1(t+1) = 0,98 u(t)$$

$$x_2(t+1) = 0,98 x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = 0,98 x_2(t)$$

$$x_4(t+1) = 0,98 x_3(t)$$

$$y(t) = 0,01 [x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)]$$

modello  
interno

$$\begin{aligned} z x_1 &= 0,98 u & x_1 &= \frac{0,98}{z} u & x_2 &= \frac{0,98^2}{z^2} u \\ z x_2 &= 0,98 x_1 & & & & \\ z x_3 &= 0,98 x_2 & \rightarrow & x_3 &= \frac{0,98^3}{z^3} u & x_4 &= \frac{0,98^4}{z^4} u \\ z x_4 &= 0,98 x_3 & & & & \end{aligned}$$

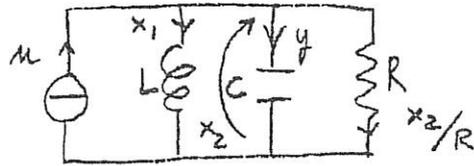
$$y = 0,01 \left[ \frac{0,98}{z} + \left( \frac{0,98}{z} \right)^2 + \left( \frac{0,98}{z} \right)^3 + \left( \frac{0,98}{z} \right)^4 \right] u$$

$$y = 0,0098 \frac{z^3 + 0,98 z^2 + 0,98^2 z + 0,98^3}{z^4} u$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{G(z)} \text{ modello esterno}$$

$$\bar{y} = G(1) \bar{u} \approx 3804 \text{ €}$$

Descrivere la rete elettrica in figura mediante un modello interno (vedi prima esercitazione) e un modello esterno.



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left[ u - x_1 - \frac{x_2}{R} \right]$$

$$y = u - x_1 - \frac{x_2}{R} \rightarrow \text{sistema improprio (d=1)}$$

↓

$$\Delta x_1 = \frac{1}{L} x_2 \rightarrow x_1 = \frac{1}{sL} x_2 = \frac{1}{s^2 LC} y$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{C} y \rightarrow x_2 = \frac{1}{sC} y$$

$$y = u - \frac{1}{s^2 LC} y - \frac{1}{sRC} y$$

$$\left( 1 + \frac{1}{s^2 LC} + \frac{1}{sRC} \right) y = u$$

$$\Rightarrow (s^2 LRC + sL + R) y = s^2 LRC u$$

$$\ddot{y} LRC + \dot{y} L + R y = LRC \ddot{u}$$

$$G(s) = \frac{s^2 LRC}{s^2 LRC + sL + R} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}}$$

$$N(s) = s^2 LRC$$

$$D(s) = s^2 LRC + sL + R$$

↳ {poli} = {λ}  
vedi  $\Delta_A(\lambda)$

NOTA Essendo il sistema improprio il grado(N) = grado(D)

Sia dato un sistema dinamico lineare a tempo continuo definito dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \ -1 \ 0] \quad d = 0$$

NOTA

$$\{\lambda\}_A = \{-1, -2, -3\}$$

Determinare la funzione di trasferimento del sistema commentando il risultato ottenuto.

Valutare equilibrio, zeri, poli e guadagno del sistema.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u$$

$$(\lambda + 1)x_1 = +x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$\rightarrow (\lambda + 2)x_2 = +u \rightarrow x_2 = +\frac{1}{\lambda + 2}u$$

$$\dot{x}_3 = -x_2 - 3x_3 + u$$

$$(\lambda + 3)x_3 = -x_2 + u$$

$$y = x_1 - x_2$$

$$x_1 = +\frac{1}{\lambda + 1}x_2 + \frac{1}{\lambda + 1}u = +\frac{1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}u + \frac{1}{\lambda + 1}u$$

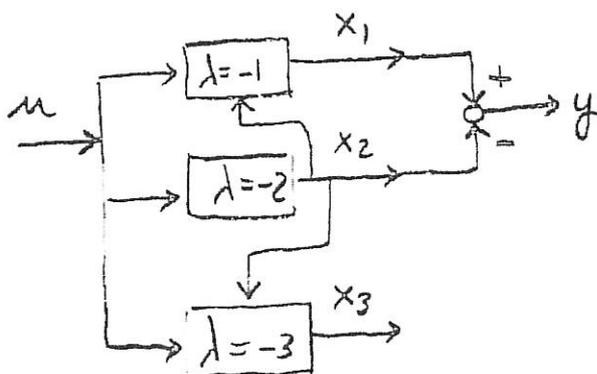
$$x_1 = \frac{+1 + \lambda + 2}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}u \rightarrow x_1 = \frac{\lambda + 3}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}u$$

$$y = \frac{\lambda + 3}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}u - \frac{1}{\lambda + 2}u = \frac{\lambda + 3 - \lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}u = \frac{2}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}u$$

$$G(\lambda) = \frac{2}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)} \rightarrow \text{poli in } -1 \text{ e } -2$$

↳ ha grado 2 < n = 3

G<sub>0</sub> è dovuto alla "forma" del sistema



La variabile  $x_3$ , pur essendo influenzata da  $u$ , non influenza né direttamente né indirettamente la variabile di uscita  $y$   
 $\Rightarrow$  grado(D) < n = 3

Tra tutti gli autovalori, si perde quello "relativo" al sottosistema che genera  $x_3$

## Equilibrio

$$-x_1 + x_2 + u = 0 \quad x_1 = x_2 + u = \frac{3}{2}u$$

$$-2x_2 + u = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}u$$

$$-x_2 - 3x_3 + u = 0 \quad x_3 = -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}u = +\frac{1}{6}u$$

zeri  $\bar{z}$

poli in  $-1$  e  $-2$

$$\mu = G(0) = \frac{2}{2} = 1 \quad \underline{\text{quadrupolo}}$$