Un commerciante di vino acquista all'inizio di ogni anno t un certo numero di bottiglie di vino, decidendo di rivenderne il 20% dopo un anno di invecchiamento e di rivendere le restanti bottiglie dopo due anni di invecchiamento. I prezzi (in €) di acquisto e di rivendita di una singola bottiglia di vino sono, rispettivamente, c e p.

a) Descrivere l'attività in esame mediante un sistema lineare a tempo discreto in cui $u(t)$ sia la spesa per l'acquisto, $y(t)$ il ricavo della rivendita e $x_i(t)$ il numero di bottiglie invecchiate di i anni all'inizio dell'anno t ($i = 1, 2$).

b) Calcolare l'equilibrio in funzione di u.

c) Ipotizzando una spesa per l'acquisto pari a 1.000 € e un costo di acquisto della singola bottiglia pari a 1.4 €, determinare il prezzo di rivendita della singola bottiglia affinché all'equilibrio il ricavo annuo sia di 3.000 €.

---

a) $x_1(t+1) = \dfrac{u(t)}{c}$ $\qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}8 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{c} \\ 0 \end{vmatrix} = b$

$x_2(t+1) = 0{,}8\, x_1(t)$ $\qquad c = \begin{vmatrix} 0{,}2p & p \end{vmatrix} \quad d = 0$

$y(t) = p \cdot 0{,}2\, x_1(t) + p \cdot x_2(t)$

b) $\bar{x}_1 = \dfrac{\bar{u}}{c}$ $\qquad \leftarrow$ stato di equilibrio $^{(*)}$

$\bar{x}_2 = 0{,}8\, \bar{x}_1 = 0{,}8 \dfrac{\bar{u}}{c}$

$\bar{y} = 0{,}2 p \bar{x}_1 + p \bar{x}_2 = 0{,}2 p \dfrac{\bar{u}}{c} + 0{,}8 p \dfrac{\bar{u}}{c} = \dfrac{p}{c} \bar{u}$

<u>NOTA</u>: tutte le bottiglie acquistate $\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)$ vengono rivendute al più in 2 anni dando un ricavo della rendita pari a $p\left(\frac{\bar{u}}{c}\right)$

c) $\bar{u} = 1000$ €

$c = 1{,}4$ €/bott $\qquad \Rightarrow \quad p = \dfrac{\bar{y} \cdot c}{\bar{u}} = \dfrac{3000 \cdot 1{,}4}{1000} = 4{,}2$ €/bott

$\bar{y} = 3000$ €

(*) Poiché A non ha autovalori in $+1$ $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0) \Rightarrow \exists (I - A)^{-1}$ ed $\exists!$ equilibrio $\bar{x} = (I - A)^{-1} b \bar{u}$

L'impresa (1) produce detersivo ed è in concorrenza con le imprese (2) e (3). Mediante indagini di mercato l'impresa ha valutato che ogni mese una frazione α_{ij} delle persone che nel mese precedente hanno comprato un fustino dell'impresa i compra un fustino dell'impresa j. Inoltre, una frazione β_i dei nuovi acquirenti compra fustini dall'impresa i. I valori dei coefficienti sono

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad [\beta_i] = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Inoltre, stima che il numero dei nuovi acquirenti sia pari ogni mese a 1500. Avvalendosi di un modello matematico (in cui l'uscita è il numero di fustini venduti dall'impresa (1) e l'ingresso il numero di nuovi acquirenti) l'impresa (1) vuole determinare il numero di clienti di ogni impresa a regime. Inoltre vuole sapere il rapporto tra il numero dei propri clienti e il numero di nuovi acquirenti.

$x_i(t)$ = # di persone che nel mese t hanno acquistato un fustino dell'impresa i $(i=1,2,3)$
(o, equivalentemente, # di fustini venduti dall'impresa i nel mese t)

$$x_1(t+1) = \alpha_{11} x_1(t) + \alpha_{21} x_2(t) + \alpha_{31} x_3(t) + \beta_1 u(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha_{12} x_1(t) + \alpha_{22} x_2(t) + \alpha_{32} x_3(t) + \beta_2 u(t)$$
$$x_3(t+1) = \alpha_{13} x_1(t) + \alpha_{23} x_2(t) + \alpha_{33} x_3(t) + \beta_3 u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$
$$\Downarrow$$
$$x_1(t+1) = 0{,}7\, x_1(t) + 0{,}4\, u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}2\, x_1(t) + 0{,}5\, x_2(t) + 0{,}4\, u(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}5\, x_3(t) + 0{,}2\, u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{vmatrix} = b \qquad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad d = 0$$

<u>Equilibrio</u> ($\exists$ unico poiché A ha autovalori in 0,7 0,5 e 0,5 cioè non ha autovalori in +1)

- $\bar{x}_1 = 0{,}7\,\bar{x}_1 + 0{,}4\,\bar{u} \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{4}{3}\bar{u}$

- $\bar{x}_2 = 0{,}2\,\bar{x}_1 + 0{,}5\,\bar{x}_2 + 0{,}4\,\bar{u}$

$\downarrow$

$5\bar{x}_2 = 2\bar{x}_1 + 4\bar{u} = \frac{8}{3}\bar{u} + 4\bar{u} = \frac{20}{3}\bar{u}$

da cui $\bar{x}_2 = \frac{4}{3}\bar{u}$

- $\bar{x}_3 = 0{,}1\,\bar{x}_1 + 0{,}1\,\bar{x}_2 + 0{,}5\,\bar{x}_3 + 0{,}2\,\bar{u}$

$\downarrow$

$5\bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 2\bar{u} = \frac{4}{3}\bar{u} + \frac{4}{3}\bar{u} + 2\bar{u} = \frac{14}{3}\bar{u}$

da cui $\bar{x}_3 = \frac{14}{15}\bar{u}$

clienti impresa (1)

$\Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 14/15 \end{vmatrix} \bar{u} \qquad \bar{y} = \bar{x}_1 = \frac{4}{3}\bar{u} \qquad \frac{\bar{x}_1}{\bar{u}} = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \mu = 4/3$

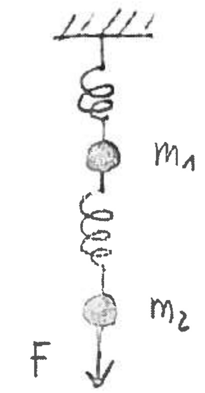
nuovi acquirenti

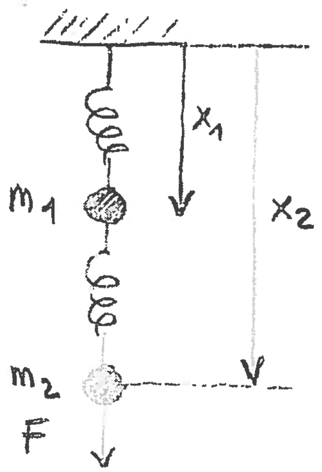
Ponendo $\bar{u} = 1500$ si ha:

$\bar{x} = \begin{vmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 1000 \end{vmatrix} \qquad \bar{y} = 2000 \qquad \mu = 4/3.$

Si descriva, mediante l'uso di un modello matematico, l'andamento della posizione del baricentro delle due masse del sistema meccanico rappresentato in figura.
Si supponga che
- le molle siano lineari con costante elastica *k* e con lunghezza a riposo nulla,
- il sistema sia immerso in un fluido con coefficiente di attrito viscoso *h*.

Si valuti inoltre la posizione di equilibrio delle due masse e del loro baricentro.





$x_1(t)$ = posizione m_1

$x_2(t)$ = posizione m_2

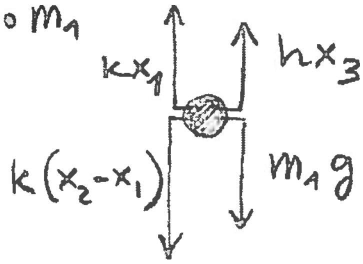
$x_3(t)$ = velocità m_1

$x_4(t)$ = velocità m_2

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = x_3(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_4(t)$$

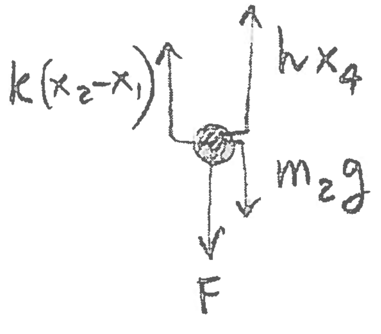
Determino $\dot{x}_3$ e $\dot{x}_4$ (accelerazioni) con la legge $m \cdot accel. = \sum$ (forze applicate) scritta per ogni (singola) massa

- m_1



$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m_1}\left(k(x_2 - x_1) + m_1 g - h x_3 - k x_1\right)$$

- m_2



$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}\left(m_2 g + F - h x_4 - k(x_2 - x_1)\right)$$

$$\dot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_4$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{m_1}\left[-2kx_1 + kx_2 - hx_3 + m_1 g\right]$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}\left[kx_1 - kx_2 - hx_4 + m_2 g + F\right]$$

$$y = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad u = \begin{vmatrix} F \\ g \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & -\frac{h}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{h}{m_2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{m_2} & 1 \end{vmatrix} = B$$

$$c = \begin{vmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad d = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix}$$

<u>Equilibrio</u> $\left(\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists!\, \bar{x}\right)$

$\bar{x}_3 = 0$

$\bar{x}_4 = 0$ $\Rightarrow$ velocità nulle

$$-2k\bar{x}_1 + k\bar{x}_2 - \cancel{h\bar{x}_3}^{\,0} + m_1 g = 0 \qquad (1)$$

$$k\bar{x}_1 - k\bar{x}_2 - \cancel{h\bar{x}_4}_{\,0} + m_2 g + F = 0 \qquad (2)$$

$$(1)+(2) \rightarrow -k\bar{x}_1 + (m_1+m_2)g + F = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{(m_1+m_2)g + F}{k}$$

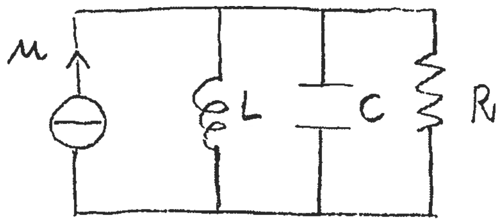
dalla (2) $\rightarrow$ $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \dfrac{m_2 g + F}{k}$ $\Rightarrow$ $\bar{x}_2 = \dfrac{(m_1 + 2m_2)\, g + 2F}{k}$

$$\bar{x} = \begin{vmatrix} \dfrac{(m_1 + m_2)g + F}{k} \\ \\ \dfrac{(m_1 + 2m_2)g + 2F}{k} \\ \\ 0 \\ \\ 0 \end{vmatrix}$$

da cui, per sostituzione, si ottiene

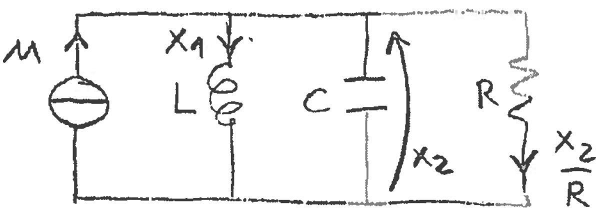
$$\bar{y} = \frac{m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2}{m_1 + m_2}$$

Si descriva, mediante l'uso di un modello matematico, l'intensità di corrente sul condensatore del circuito elettrico in figura al variare della intensità di corrente generata dal bipolo.



$x_1(t)$ = corrente che attraversa l'induttore

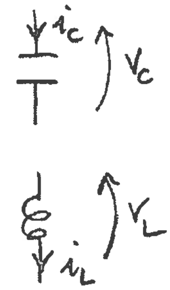
$x_2(t)$ = tensione ai capi del condensatore

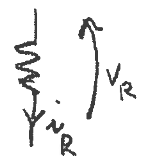


$i_c = C\,\dot{v}_c$

$v_L = L\,\dot{i}_L$

$v_R = R\,i_R$





$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left[u - x_1 - \frac{x_2}{R}\right]$$

$$y = u - x_1 - \frac{x_2}{R}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{R} \end{vmatrix} \qquad d = 1$$

<u>Equilibrio</u> $(\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists!\, \bar{x})$

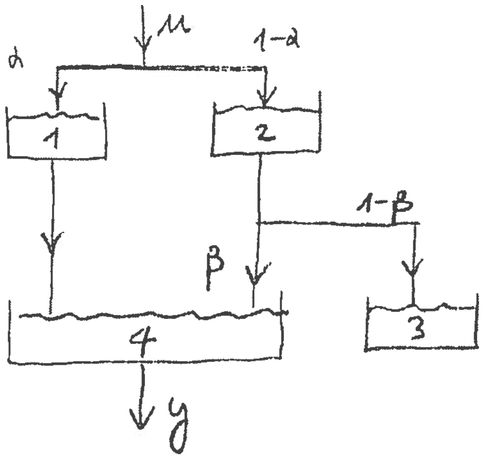
$$\frac{1}{L}\bar{x}_2 = 0 \rightarrow \bar{x}_2 = 0$$

$$\frac{1}{C}\left(\bar{u} - \bar{x}_1 - \frac{\bar{x}_2}{R}\right) = 0 \rightarrow \bar{x}_1 = \bar{u}$$

da cui $\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\bar{y} = \bar{u} - \bar{x}_1 - \bar{x}_2/R \rightarrow \bar{y} = 0$$

Si descriva mediante un modello matematico la rete idrica mostrata in figura (si supponga che i serbatoi siano lineari).
Si valutino gli equilibri della rete nel caso in cui la stessa non sia alimentata oppure sia alimentata da un ingresso costante.



$x_i(t)$ = volume di invaso del serbatoio i $(i=1,2,3,4)$

k_i = costante di deflusso del serbatoio i

$$\dot{x}_1 = \alpha u - k_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = (1-\alpha) u - k_2 x_2$$

$$\dot{x}_3 = (1-\beta) k_2 x_2$$

$$\dot{x}_4 = k_1 x_1 + \beta k_2 x_2 - k_4 x_4$$

$$y = k_4 x_4$$

$$A = \begin{vmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta)k_2 & 0 & 0 \\ k_1 & \beta k_2 & 0 & -k_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha \\ 1-\alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

$\{\lambda\}_A = \{-k_1, -k_2, 0, -k_4\} \Rightarrow A$ ha un autovalore nullo

$\Rightarrow \nexists A^{-1}$. Pertanto il sistema può ammettere infiniti equilibri oppure non ne ammette. Ciò dipenderà dalla scelta di u, come vediamo.

• Rete non alimentata $\rightarrow \bar{u}=0$

$$\mathring{x}_1=0 \rightarrow -k_1\bar{x}_1=0 \rightarrow \bar{x}_1=0$$

$$\mathring{x}_2=0 \rightarrow -k_2\bar{x}_2=0 \rightarrow \bar{x}_2=0$$

$$\mathring{x}_3=0 \rightarrow (1-\beta)\,k_2\bar{x}_2=0 \rightarrow \text{sempre verificata}$$

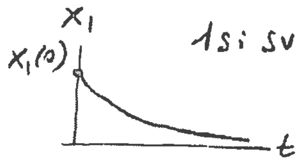
$$\mathring{x}_4=0 \rightarrow k\bar{x}_1+\beta k_2\bar{x}_2-k_4\bar{x}_4=0 \rightarrow \bar{x}_4=0$$

$$\bar{x}=\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{x}_3 \\ 0 \end{vmatrix}$$ con $\bar{x}_3$ qualsiasi $\Rightarrow \exists\infty$ equilibri (i serbatoi 1, 2 e 4 si svuotano)

$$\bar{y}=0$$

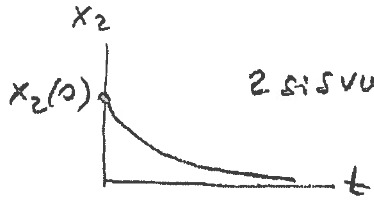
<u>NOTA</u>: $\bar{x}_3$ dipende da $x_2(0)$ e $x_3(0)$

$$\mathring{x}_1=-k_1x_1 \rightarrow x_1(t)=x_1(0)e^{-k_1t}$$



1 si svuota

$$\mathring{x}_2=-k_2x_2 \rightarrow x_2(t)=x_2(0)e^{-k_2t}$$

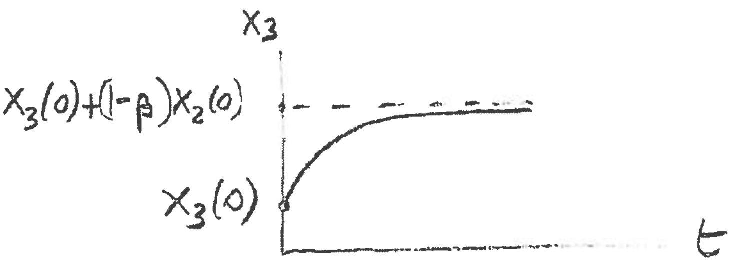


2 si svuota

$$\mathring{x}_3=(1-\beta)k_2x_2$$

$$\int_{x_3(0)}^{x_3(t)} dx_3 = (1-\beta)k_2x_2(0)\int e^{-k_2t}dt$$

da cui $x_3(t)=x_3(0)+(1-\beta)x_2(0)\left(1-e^{-k_2t}\right)$



$$x_3(t)\rightarrow x_3(0)+(1-\beta)x_2(0)=\bar{x}_3$$

$$\mathring{x}_4 = k_1 x_1 + \beta k_2 x_2 - k_4 x_4 \xrightarrow[\substack{x_1 \to 0 \\ x_2 \to 0}]{} -k_4 x_4$$

$x_4(t) \to x_4(0) e^{-k_4 t}$ Anche 4 si svuota

- Rete alimentata con $\bar{u}$ $(\neq 0)$

$\mathring{x}_1 = 0 \to \quad \alpha \bar{u} = k_1 \bar{x}_1 \to \bar{x}_1 = \frac{\alpha}{k_1} \bar{u}$

$\mathring{x}_2 = 0 \to \quad (1-\alpha) \bar{u} = k_2 \bar{x}_2 \to \bar{x}_2 = \frac{1-\alpha}{k_2} \bar{u}$

$\mathring{x}_3 = 0 \to (1-\beta) k_2 \bar{x}_2 = 0 \to \bar{x}_2 = 0$ ASSURDO

$\Downarrow$

$\nexists$ equilibri

Infatti il serbatoio 3, non avendo uscita, continua ad accumulare

$x_3(t) \to \infty$