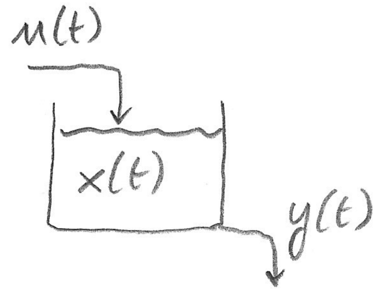
Modello del singolo serbatoio (lago/vasca/...)



Determinare
- esistenza e unicità dell'equilibrio
- stato e uscita di equilibrio
- guadagno

$u(t)$ = portata di ingresso
$x(t)$ = volume di invaso
$y(t)$ = portata di uscita

$$\dot{x}(t) = \underbrace{u(t)}_{\text{portata entrante}} - \underbrace{y(t)}_{\text{portata uscente}}$$

Nell'ipotesi $y(t) = k\,x(t)$ si ha:

$$\dot{x}(t) = -k\,x(t) + u(t)$$
$$y(t) = k\,x(t)$$

$$A = -k = \lambda$$

$\boxed{k \neq 0} \rightarrow \lambda \neq 0 \rightarrow \exists!\ \bar{x} \rightarrow 0 = -k\bar{x} + \bar{u} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{k}\bar{u}$

$\bar{y} = k\bar{x} = \bar{u}$

$\mu = \bar{y}/\bar{u} = 1$

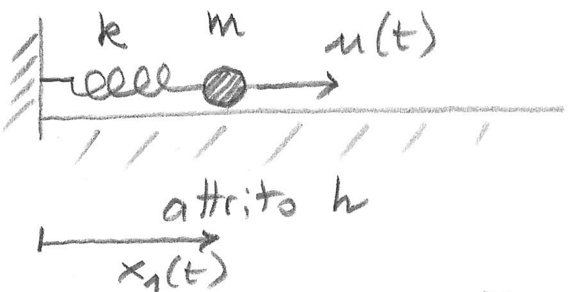
$\boxed{k = 0} \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow$ si perde l'esistenza e unicità dell'equilibrio

Dalla condizione $0 = -k\bar{x} + \bar{u} \xrightarrow{k=0} 0 = \bar{u}$ si ha:

$\bar{u} \neq 0$ ASSURDO $\Rightarrow \nexists\, \bar{x}$

$\bar{u} = 0$ SEMPRE VERIFICATA $\forall \bar{x} \Rightarrow \exists \infty\ \bar{x}$

Sistema meccanico : massa - molla con attrito



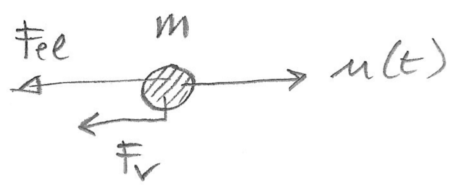
La massa m è soggetta a

- forza esterna $u(t)$
- forza di richiamo elastica F_{el}
- forza di attrito viscoso F_v

Formulare il modello matematico che descrive l'evoluzione del sistema meccanico. Studiare esistenza e unicità dell'equilibrio. Determinare stato e uscita (posizione della massa) di equilibrio e guadagno.

$x_1(t)$ = posizione della massa all'istante t

$x_2(t)$ = velocità della massa all'istante t



FORZE APPLICATE ALLA MASSA

dove $F_{el} = k\,x_1(t)$ (k = costante elastica della molla)

$F_v = h\,x_2(t)$ (h = costante di attrito viscoso)

$$\mathring{x}_1(t) = x_2(t)$$ → derivata della posizione nel tempo = velocità

$$\mathring{x}_2(t) = \frac{1}{m}\left(u(t) - k x_1(t) - h x_2(t)\right)$$ → derivata della velocità nel tempo = acceler. + LEGGE DI NEWTON

m · acceler = $\sum$ (forze applicate)

$$y(t) = x_1(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{h}{m} \end{vmatrix} \qquad \det A = \frac{k}{m}$$

$\boxed{k \neq 0} \rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow \exists!\, \bar{x}$

$(\lambda_i \neq 0 \ \forall i)$

$(\exists A^{-1})$

Calcolo $\bar{x}$ imponendo le condizioni all'equilibrio

$(\text{t.c.} \rightarrow \dot{x} = 0)$

$$0 = \bar{x}_2$$

$$0 = \frac{1}{m}(\bar{u} - k\bar{x}_1 - \cancel{h\bar{x}_2}) \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{k}\bar{u} \qquad \Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} \frac{1}{k}\bar{u} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_1 = \frac{1}{k}\bar{u} \quad \rightsquigarrow \quad \mu = \bar{y}/\bar{u} = \frac{1}{k}$$

$\boxed{k = 0} \rightarrow \det A = 0 \rightarrow$ si perde l'esistenza e unicità dell'equilibrio e si ha:

$(\exists \lambda_i = 0)$

$(\nexists A^{-1})$

$$0 = \bar{x}_2$$

$$0 = \frac{1}{m}(\bar{u} - \cancel{k\bar{x}_1} - \cancel{h\bar{x}_2}) \rightarrow 0 = \bar{u}$$

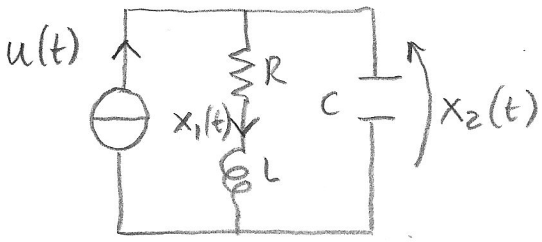
$\bar{u} \neq 0 \rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow \nexists\, \bar{x}$

$\bar{u} = 0 \rightarrow$ sempre verificata con $\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{vmatrix}$ qualsiasi

Rete elettrica

modello, $\exists ! \bar{x}$, calcolo equilibrio, guadagno

↳ già vista a lezione



$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}\left[x_2(t) - R x_1(t)\right]$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}\left[u(t) - x_1(t)\right]$$

$$y(t) = x_2(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \frac{1}{LC} \neq 0 \rightarrow \exists ! \bar{x}$$

$$0 = \frac{1}{L}\left(\bar{x}_2 - R\bar{x}_1\right)$$

$$0 = \frac{1}{C}\left(\bar{u} - \bar{x}_1\right)$$

$$\rightarrow \quad \bar{x}_1 = \bar{u}, \quad \bar{x}_2 = R\bar{u}$$

con $\bar{y} = \bar{x}_2 = R\bar{u}$

$$\mu = \bar{y}/\bar{u} = R$$

Modello del conto corrente

$x(t)$ = € su c.c. nell'anno t

$u(t)$ = prelievi/versamenti nell'anno t

r = tasso di interesse $(r>0)$

- esistenza e unicità dell'equilibrio
- stato e uscita di equilibrio
- guadagno

$$x(t+1) = x(t) + u(t) + r\,x(t)$$

$$\hookrightarrow \; x(t+1) = (1+r)\,x(t) + u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

$A = 1+r = \lambda$ Poiché $r>0 \Rightarrow \lambda \neq 1 \Rightarrow \exists!\, \bar{x}$

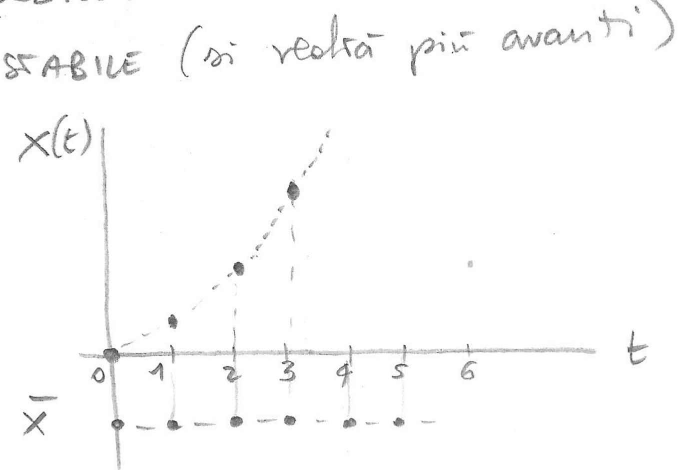
$$\cancel{\bar{x}} = \cancel{\bar{x}} + \bar{u} + r\bar{x} \rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{r}\bar{u}$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{r}\bar{u} \quad \text{e} \quad \mu = \bar{y}/\bar{u} = -\frac{1}{r}$$

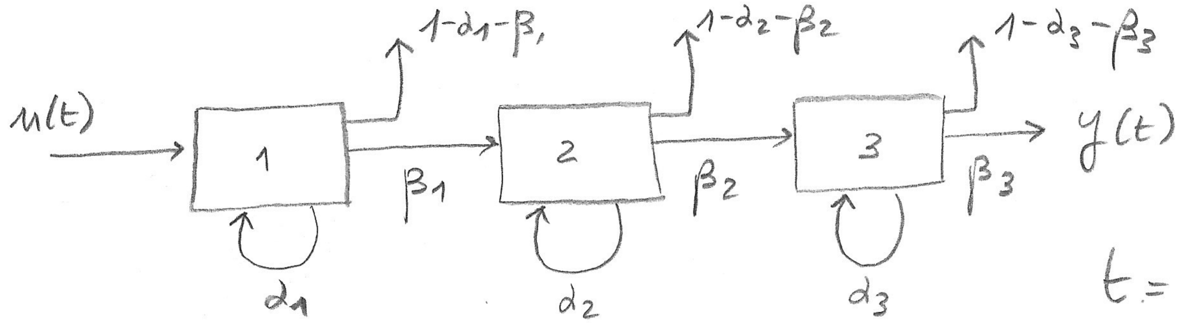
NOTA $\bar{u} > 0 \rightarrow \bar{x} = -\frac{1}{r}\bar{u} < 0 \rightsquigarrow$ debito costante su c.c.

se $x(0) = \bar{x} \Rightarrow x(t) = \bar{x} \;\forall t \rightsquigarrow$ il versamento $\bar{u}$ compensa gli interessi $r\bar{x}$ da dare alla banca essendo in debito di $\bar{x}$

Se $x(0) \neq \bar{x}$, per esempio $x(0)=0$, $\Rightarrow x(t)$ aumenta "discostandosi" da $\bar{x}$. Ciò accade perché il sistema è INSTABILE (si vedrà più avanti)



Processo produttivo a tre fasi di lavorazione



t = ora

Controllo di qualità :

α_i = frazione di pezzi in lavorazione nella fase i che dovrà ripetere la fase i

β_i = frazione di pezzi in lavorazione nella fase i che può passare alla fase di lavorazione successiva

$\Rightarrow 1-\alpha_i-\beta_i$ = frazione di ... che viene scartata

$u(t)$ = nuovi pezzi messi in lavorazione

$y(t)$ = pezzi che hanno finito con successo tutte le fasi di lavorazione

Ogni fase di lavorazione dura un'ora

- Formulare il modello matematico del processo produttivo
- Discutere esistenza e unicità dell'equilibrio
- Calcolare stato e uscita di equilibrio + guadagno

Variabili di stato

$x_i(t)$ = numero di pezzi in lavorazione nella fase i ($i=1,2,3$) nell'ora t

$$x_1(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + u(t)$$

$$x_2(t+1) = \beta_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

$$x_3(t+1) = \beta_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t)$$

$$y(t) = \beta_3 x_3(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \qquad \lambda_i = \alpha_i \qquad i = 1,2,3$$

NOTA: E' lecito supporre $\alpha_i < 1 \ \forall i$
Infatti, se $\exists\, \alpha_i = 1 \Rightarrow$ nella fase i $\exists$ solo riciclo e la produzione non va avanti! (*)

$$\Rightarrow \lambda_i = \alpha_i \neq 1 \ \forall i \longrightarrow \exists!\, \bar{x}$$

$$\bar{x}_1 = \alpha_1 \bar{x}_1 + \bar{u} \longrightarrow \bar{x}_1 = \frac{1}{1-\alpha_1}\bar{u}$$

$$\bar{x}_2 = \beta_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2 = \frac{\beta_1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\bar{u}$$

$$\bar{x}_3 = \beta_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 \rightarrow \bar{x}_3 = \frac{\beta_1\beta_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}\bar{u}$$

$$\bar{y} = \beta_3 \bar{x}_3 = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}\bar{u}$$

$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \mu = \frac{\beta_1\beta_2\beta_3}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)}$$

(*)

Vediamo, come esempio, cosa succederebbe se fosse

$\alpha_1 = 1$ (fase 1 = solo riciclo) $\rightarrow \beta_1 = 0$

$\alpha_2 < 1$

$\alpha_3 < 1$

Cosa ci si aspetta? Le fasi 2 e 3 si "svuotano" $\rightarrow \bar{x}_2 = 0$

$\bar{x}_3 = 0$

La fase 1, non avendo uscita ($\beta_1 = 0$), accumula pezzi in lavorazione se $\bar{u} \neq 0$ ($\nexists$ equilibrio) oppure continua a rilavorare gli stessi pezzi se $\bar{u} = 0$ ($\exists \infty$ equilibri con $\bar{x}_1$ qualsiasi $\rightsquigarrow$ quelli che c'erano nello stato iniziale del sistema)

In formule:

$\bar{x}_1 = \bar{x}_1 + \bar{u} \longrightarrow 0 = \bar{u}$

$\bar{x}_2 = \alpha_2 \bar{x}_2 \longrightarrow \bar{x}_2 = 0$

$\bar{x}_3 = \beta_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 \longrightarrow \bar{x}_3 = 0$

se $\bar{u} \neq 0$ ASSURDO $\rightarrow \nexists\, \bar{x}$

se $\bar{u} = 0$ sempre verificata $\forall \bar{x}_1 \rightarrow \exists \infty\, \bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$