Stabilità dei sistemi lineari a tempo continuo

Dato un sistema lineare a tempo continuo con matrice di stato $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e autovalori λ_i, il sistema è:

- Asintoticamente stabile **se e solo se** $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall\, i = 1...n$
- Instabile **se** $\exists\, i$ t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$

Inoltre:

- Se A è diagonalizzabile:
  $\rightarrow$ semplicemente stabile: **se e solo se** $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0\, \forall\, i$ **e** $\exists i$ t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$
  $\rightarrow$ instabile: **se e solo se** $\exists\, i$ t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$
- Se A non è diagonalizzabile e $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0\, \forall\, i$ **e** $\exists j$ t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$:
  $\rightarrow$ semplicemente stabile: **se e solo se**
  $$\text{molteplicità\_geometrica}(\lambda_j) = \text{molteplicità\_algebrica}(\lambda_j)$$
  per **tutti** i λ_j t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$
  $\rightarrow$ instabile: **se**
  $$\text{molteplicità\_geometrica}(\lambda_j) < \text{molteplicità\_algebrica}(\lambda_j)$$
  per **almeno un** λ_j t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$

Note su stab. semplice e instabilità nel caso non diagonalizzabile:

- conta solo la molteplicità geometrica dei λ_j t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$
- se la molteplicità algebrica di tutti i λ_j t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ è pari a 1 (e.g., $\lambda_j = \{0, \pm i\}$) allora il sistema semplicemente stabile, perché sicuramente
  $$\text{molteplicità\_geometrica}(\lambda_j) = \text{molteplicità\_algebrica}(\lambda_j) = 1$$
- se almeno un autovalore λ_j t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ ha molteplicità algebrica maggiore di 1 è possibile valutare la semplice stabilità o l'instabilità del sistema seguendo questa procedura.
  Si scrive il candidato "polinomio minimo" $\theta(\lambda)$ ottenuto ponendo a 1 la molteplicità di tutti gli autovalori λ_j t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ e ponendo pari alla molteplicità algebrica la molteplicità dei restanti autovalori a parte reale negativa.
  Ad esempio:
  $$\Delta(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2+1)^3(\lambda+2)^3(\lambda+3)^4 \rightarrow \theta(\lambda) = \lambda(\lambda^2+1)(\lambda+2)^3(\lambda+3)^4$$
  Si ha:
  $$\theta(A) = 0 \iff \text{ sistema semplicemente stabile}$$
  $$\theta(A) \neq 0 \iff \text{ sistema instabile}$$

Traccia e determinante della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (tempo continuo)

$\text{tr}(A) = \Sigma_i \lambda_i$	$\text{tr}(A) > 0 \implies \exists i$ t.c. $\text{Re}(\lambda_i) > 0 \implies A$ instabile
$\det(A) = \Pi_i \lambda_i$	$\det(A)(-1)^n < 0 \implies A$ instabile Infatti: n pari $\implies \det(A) < 0 \implies$ almeno due autovalori reali discordi n dispari $\implies \det(A) > 0 \implies$ almeno un autovalore reale positivo

Criterio traccia/determinante n=2 (tempo continuo)

$\text{tr}(A) < 0$ & $\det(A) > 0 \iff A$ asintoticamente stabile

Coefficienti del polinomio caratteristico (tempo continuo)

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + ... + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

- A asintoticamente stabile $\implies \alpha_i > 0\ \forall\, i$
- Se $n = 2$, A asintoticamente stabile $\iff \alpha_i > 0\ \forall\, i = 1, 2$
  ($\alpha_1 = -tr(A)$ & $\alpha_2 = det(A)$)
- Per polinomi di grado $n > 2$, si possono usare dei criteri per dedurre la asintotica stabilità del sistema. In particolare:
  - **Criterio di Hurwitz:** sistema asintoticamente stabile se e solo se tutti i minori principali di Nord-Ovest della matrice di Hurwitz hanno determinante > 0.
  - **Corollario al criterio di Hurwitz per $n = 3$:** sistema asintoticamente stabile se e solo se $\alpha_i > 0\ \forall\, i = 1, 2, 3$ & $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_3$.

Stabilità dei sistemi lineari a tempo discreto

Dato un sistema lineare a tempo discreto con matrice di stato $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e autovalori λ_i:

- Le condizioni di stabilità sono analoghe a quelle ottenute a tempo continuo pur di sosituire $\mathrm{Re}(\lambda_i) \lesseqgtr 0$ con $|\lambda_i| \lesseqgtr 1$.

Traccia e determinante della matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (tempo discreto)

$\mathrm{tr}(A) = \Sigma_i \lambda_i$	$\lvert\mathrm{tr}(A)\rvert > n \implies \exists i$ t.c. $\lvert\lambda_i\rvert > 1 \implies A$ instabile
$\det(A) = \Pi_i \lambda_i$	$\lvert\det(A)\rvert > 1 \implies \exists i$ t.c. $\lvert\lambda_i\rvert > 1 \implies A$ instabile

Criterio traccia/determinante n=2 (tempo discreto)

$$|\mathrm{tr}(A)| < 1 + \det(A) \;\;\&\;\; |\det(A)| < 1 \iff A \text{ asintoticamente stabile}$$

Sistemi linearizzati

Sia dato un sistema non lineare, linearizzato intorno a un suo punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ con matrice di stato del sistema linearizzato $A = \frac{\delta f}{\delta x}\big|_{\bar{x},\bar{u}}$ avente autovalori λ_i.

Sistemi a tempo continuo: il punto di equilibrio è:

- Asintoticamente stabile **se** $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall\, i = 1...n$
- Instabile **se** $\exists\, i$ t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$

Sistemi a tempo discreto: il punto di equilibrio è:

- Asintoticamente stabile **se** $|\lambda_i| < 1 \quad \forall\, i = 1...n$
- Instabile **se** $\exists\, i$ t.c. $|\lambda_i| > 1$

Rispetto al caso lineare, se (a t.c.) $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0\, \forall\, i$ **e** $\exists i$ t.c. $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ oppure se (a t.d.) $|\lambda_i| \leq 1\, \forall\, i$ **e** $\exists i$ t.c. $|\lambda_i| = 1$, l'equilibrio può essere as. stabile, stabile o instabile e non è possibile dedurlo dal sistema linearizzato, in quanto la stabilità dipende dai termini di grado superiore nello sviluppo in serie di Taylor.

Proprietà utili per calcolo di autovalori e stabilità

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A) = -\det(A')$ dove A' è ottenuta scambiando due righe O due colonne
- $\lambda(A) = \lambda(A')$ dove A' è ottenuta scambiando due righe E due colonne i e j
- matrici diagonali a blocchi o triangolari a blocchi: $\lambda(A) = \lambda(A_{11}) \cup \lambda(A_{22})$