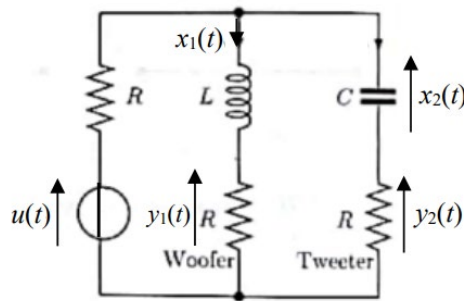


**Progettazione di un sistema di riproduzione audio – Soluzioni**

Nel circuito elettrico in figura



indichiamo con  $x_1(t)$  la corrente che attraversa l'induttore e con  $x_2(t)$  la tensione ai capi del condensatore. Sia inoltre  $u(t)$  la tensione applicata dal generatore di tensione ideale al circuito, mentre  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  le tensioni ai capi di woofer e tweeter, rispettivamente. Le equazioni di stato e uscita che descrivono il circuito elettrico sono<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u & \longrightarrow & \dot{x} = Ax + bu \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u \\ y_1 &= Rx_1 & \longrightarrow & y_1 = c_1x + d_1u \\ y_2 &= -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u & \longrightarrow & y_2 = c_2x + d_2u \end{aligned}$$

da cui

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3R}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad c_1 = [R \quad 0] \quad c_2 = \left[-\frac{R}{2} \quad -\frac{1}{2}\right] \quad d_1 = 0 \quad d_2 = \frac{1}{2}$$

Scriviamo il modello in Matlab.

Definiamo i parametri  $R$ ,  $C$  e  $L$  ( $R = 8\Omega$ ,  $L = 0.75 \text{ mH} = 7.5 \cdot 10^{-4} \text{ H}$  e  $C = 3.76 \mu\text{F} = 3.76 \cdot 10^{-6} \text{ F}$ )

$R=8$ ;

$C=3.76 \cdot 10^{-6}$ ;

$L=7.5 \cdot 10^{-4}$ ;

Definiamo le matrici  $A$ ,  $b$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$

---


$$^1 \dot{x}_1 = \frac{1}{L}[u - R(x_1 + C\dot{x}_2) - Rx_1] \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left[ \frac{Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2}{R} \right] \quad (2)$$

$$(1) + \frac{RC}{L} \cdot (2) \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u$$

$$\frac{L}{RC} \cdot (1) - (2) \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u$$

$$y_1 = Rx_1$$

$$y_2 = Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2 = -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u$$

```

A=[-3*R/(2*L)    1/(2*L)
   -1/(2*C)      -1/(2*R*C)];
b=[1/(2*L)       1/(2*R*C)]';
c1=[R    0];
c2=[-R/2  -1/2];
d1=0;
d2=1/2;

```

Definiamo come *woofer* il sistema in variabili di stato (comando *ss*) associato all'uscita  $y_1$  (quindi al vettore  $c_1$  e allo scalare  $d_1$ ) (dovrà essere un filtro passa basso)

```
woofer=ss(A,b,c1,d1);
```

Definiamo come *tweeter* il sistema in variabili di stato (comando *ss*) associato all'uscita  $y_2$  (quindi al vettore  $c_2$  e allo scalare  $d_2$ ) (dovrà essere un filtro passa alto)

```
tweeter=ss(A,b,c2,d2);
```

Per verificare che la frequenza di crossover  $f_{cr}$  sia pari a quella richiesta, 0.5 kHz, simuliamo il sistema alimentando per esempio il circuito con un segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a 1 kHz (1000 Hz  $\rightarrow \omega = 2\pi 1000 \sim 6.28 \cdot 10^3 \text{ rad/sec} \rightarrow$  alta frequenza). **In caso di buon funzionamento del sistema di riproduzione audio, tale segnale deve essere filtrato dal woofer e passare bene nel tweeter.**

Definiamo il periodo della sinusoide in ingresso e l'intervallo temporale della simulazione  $T$

```

freq=1000;
periodo=1/freq;
T=linspace(0,10*periodo,1000);

```

**NOTA:** Se la frequenza delle oscillazioni è di 1 kHz = 1000 Hz, il periodo (inverso della frequenza) è pari a 0.001 s. Volendo visualizzare 10 oscillazioni, l'intervallo di tempo di simulazione è pari a  $10 \cdot 0.001 = 0.01$  s.

Definiamo l'ingresso sinusoidale ( $u(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi f t)$ )

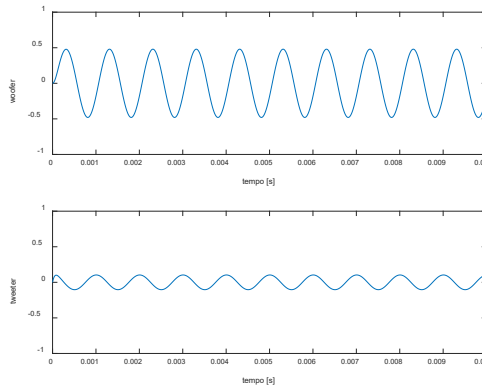
```
U=sin(2*pi*freq*T);
```

Simuliamo il woofer (comando *lsim*) e il tweeter osservando in un grafico che **il segnale in uscita dal woofer non viene filtrato** mentre il segnale in uscita viene filtrato

```

Ywoofer=lsim(woofer,U,T);
Ytweeter=lsim(tweeter,U,T);
figure;
subplot(2,1,1); plot(T,Ywoofer); xlabel('tempo [s]'); ylabel('woofer'); ylim([-1 1]);
subplot(2,1,2); plot(T,Ytweeter); xlabel('tempo [s]'); ylabel('tweeter');
ylim([-1 1]);

```



La simulazione mostra tuttavia un risultato opposto a quello aspettato: il segnale di ingresso passa bene nel woofer e viene attenuato dal tweeter. Al contrario, il segnale in alta frequenza dovrebbe essere filtrato dal woofer e passare bene nel tweeter.

Si può anche ascoltare ciò che accade utilizzando il file sonoro\_f.m

```
sonoro_f(1000,R,L,C);
```

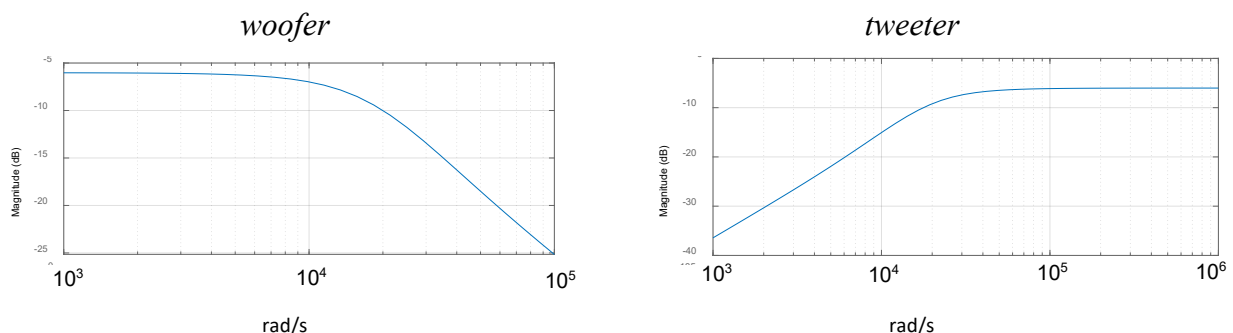
(l'argomento, 1000 Hz, è la frequenza scelta per il segnale in ingresso)

Il primo suono è quello generato dal segnale di ingresso a 1 kHz, il secondo è il suono in uscita dal woofer, il terzo è quello in uscita dal tweeter. Se il dispositivo di riproduzione funzionasse correttamente il secondo segnale (uscita dal woofer) dovrebbe essere attutito rispetto al segnale di ingresso mentre il terzo (uscita dal tweeter) dovrebbe essere pari a questo. Ma così non è, anzi è il contrario!

Anche aumentando la frequenza del segnale di ingresso, per esempio a 1.5 kHz (`sonoro_f(1500,R,L,C);`), non si nota differenza. Solo per frequenze molto elevate (4 kHz `sonoro_f(4000,R,L,C);`) il suono viene filtrato dal woofer passando bene nel tweeter.

Mediante i diagrammi di Bode di woofer e tweeter è possibile giustificare tali comportamenti.

```
figure; bode(woofer); grid;
figure; bode(tweeter); grid;
```



I rami del circuito di woofer e di tweeter si comportano come filtri passa basso e passa alto, rispettivamente.

Per valutare l'estremo superiore della banda passante per il woofer e l'estremo inferiore della banda passante per il tweeter, occorre determinare i poli delle funzioni di trasferimento  $G_1$  da  $u$  a  $y_1$  (woofer) e  $G_2$  da  $u$  a  $y_2$  (tweeter) (comandi `ss2tf`, `tf` e `pole`)

```
[NUM1,DEN1]=ss2tf(A,b,c1,d1);
```

```

G1=tf(NUM1,DEN1);
poliG1=pole(G1);

[NUM2,DEN2]=ss2tf(A,b,c2,d2);
G2=tf(NUM2,DEN2);
poliG2=pole(G2);

```

I poli (sono gli stessi e sono pari agli autovalori della matrice  $A$ :  $\text{eig}(A)$ ) sono complessi coniugati, pertanto la banda passante è approssimativamente pari alla pulsazione naturale  $\omega_n$  dei due poli complessi coniugati di  $G_1$  e  $G_2$

$Bp=\text{abs}(\text{poliG1})$

**NOTA:** Se  $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  ha due poli complessi coniugati  $p_{1,2} = a \pm ib$ , allora

$$D(s) = (s-p_1)(s-p_2) = (s-(a+ib))(s-(a-ib)) = s^2 + 2as + (a^2 + b^2) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

dove  $\omega_n^2 = (a^2 + b^2) \rightarrow \omega_n = \sqrt{(a^2 + b^2)} \rightarrow \omega_n$  è il modulo dei poli

Pertanto, la banda passante del woofer è circa pari a  $\omega < 1.8831 \cdot 10^4$  rad/s mentre quella del tweeter è circa pari a  $\omega > 1.8831 \cdot 10^4$  rad/s.

Ciò giustifica quanto abbiamo trovato: un segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a 1 kHz ( $\omega = 2\pi f = 6280 = 0.628 \cdot 10^4$  rad/sec) passa bene nel woofer (è un segnale “in banda”) e viene filtrato dal tweeter (è un segnale “fuori banda”).

Approssimando quindi la pulsazione di crossing  $\omega_{cr}$  con al pulsazione naturale  $\omega_n$ , la frequenza di crossing per il dispositivo assegnato è circa pari a  $f_{cr} = \frac{1.883 \cdot 10^4}{2\pi} \sim 3$  kHz; il sistema di riproduzione audio non soddisfa la specifica di progetto richiesta ( $f_{cr} = 0.5$  kHz).

Nel progettare un sistema di riproduzione che ponga la frequenza di crossing  $f_{cr}$  in 0.5 kHz, si può, ad esempio, lasciare  $R$  pari al valore  $8\Omega$  e scegliere  $L$  e  $C$  facendo in modo che i due poli (gli autovalori di  $A$ ) siano reali coincidenti in  $\omega_{cr} = 2\pi f_{cr} = 2\pi \cdot 0.5 \cdot 10^3 \sim 3.14 \cdot 10^3$  rad/s. In tal modo i diagrammi di Bode del woofer e del tweeter subiranno un cambio di pendenza massimo di  $-40$  dB/dec per il woofer e di  $+40$  dB/dec per il tweeter proprio in  $\omega_{cr}$  così che la banda passante sarà, rispettivamente, circa pari a  $(0, \omega_{cr})$  e  $(\omega_{cr}, +\infty)$ .

La matrice  $A = \begin{bmatrix} -\frac{3R}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix}$  ha

$$\text{tr}(A) = -\frac{3R}{2L} - \frac{1}{2RC}$$

$$\det(A) = \frac{1}{LC}$$

Volendo porre  $p_1 = p_2 = -\omega_{cr}$ , si ottiene

$$\text{tr}(A) = -\frac{3R}{2L} - \frac{1}{2RC} = p_1 + p_2 = -2\omega_{cr}$$

$$\det(A) = \frac{1}{LC} = p_1 p_2 = \omega_{cr}^2$$

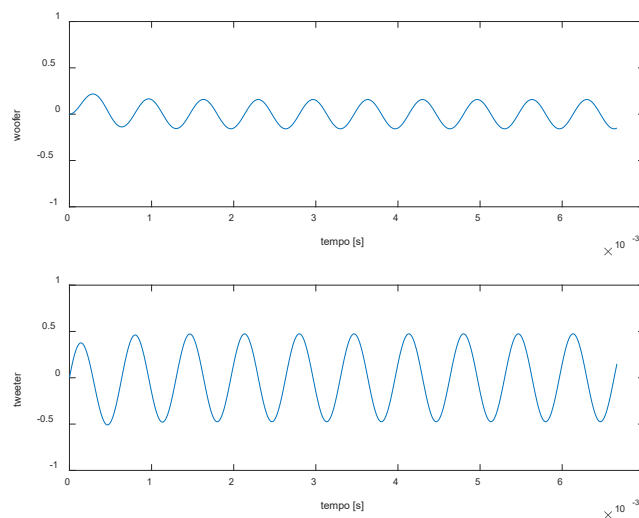
Una possibile scelta è:  $C = \frac{1}{R\omega_{cr}}$   $L = R^2C$

Verifichiamo con Matlab che ora tutto funzioni:

```
R=8;
fcr=500;
omegacr=2*pi*fcr;
C=1/(R*omegacr);
L=R^2*C;
A=[-3*R/(2*L)    1/(2*L)
   -1/(2*C)      -1/(2*R*C)];
b=[1/(2*L)        1/(2*R*C)];
woofer=ss(A,b,c1,d1);
tweeter=ss(A,b,c2,d2);
```

Simuliamo i due sistemi con l'ingresso a 1 kHz, verificando ora che tale ingresso viene filtrato dal woofer e passa attraverso il tweeter.

```
Ywoofer=lsim(woofer,U,T);
Ytweeter=lsim(tweeter,U,T);
figure;
subplot(2,1,1); plot(T,Ywoofer); xlabel('tempo [s]'); ylabel('woofer');
ylim([-1 1]);
subplot(2,1,2); plot(T,Ytweeter); xlabel('tempo [s]'); ylabel('tweeter');
ylim([-1 1]);
```



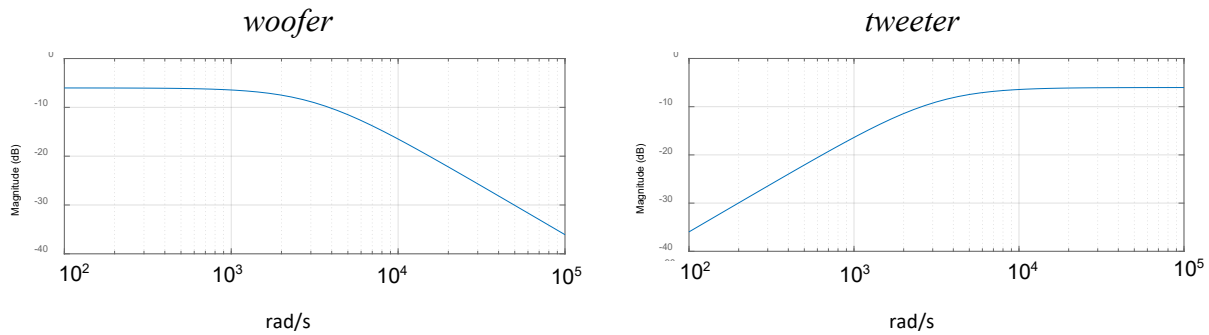
La simulazione mostra il risultato aspettato: il segnale di ingresso viene filtrato dal woofer e passa bene nel tweeter.

Proviamo il risultato anche con il sonoro

```
sonoro_f(1000,R,L,C);
```

I diagrammi di Bode di woofer e tweeter confermano la bontà del progetto

```
figure; bode(woofer); grid;
figure; bode(tweeter); grid;
```



La banda passante (delimitata superiormente per il woofer e inferiormente per il tweeter) è ora circa data da  $\omega_{cr} = 3.14 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_{cr} = 500 \text{ Hz}$

Infatti i comandi

```
[NUM1,DEN1]=ss2tf(A,b,c1,d1);
G1=tf(NUM1,DEN1);
poliG1=pole(G1);
abs(poliG1)
```

restituiscono proprio il valore  $3.1416 \cdot 10^3$

### NOTE a cura del docente:

- Segnali in ingresso con frequenza inferiore a 500 Hz sono filtrati dal tweeter e passano bene nel woofer

```
sonoro_f(200,R,L,C);
```

- Si può infine ascoltare l'effetto relativo a un ingresso con frequenza variabile da 100 a 2000 Hz con

```
sweep(R,L,C)
```

Il risultato mostra dimostra come un segnale in ingresso a frequenza variabile (da bassa a alta) venga filtrato alle alte frequenze dal woofer e alle basse frequenze dal tweeter.

