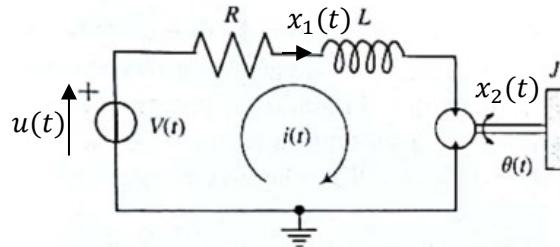


## Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica

### Controllo della velocità di rotazione dell'albero id un motore elettrico – Soluzioni

Indichiamo con  $u(t)$  la tensione applicata al circuito (in Volt [V]), con  $x_1(t)$  la corrente che attraversa il circuito (in Ampere [A]) e con  $x_2(t)$  la velocità angolare dell'albero motore (in [rad/s]). Sia  $y(t)$  la variabile di uscita da controllare (in giri/min).



Le equazioni di stato e di uscita che caratterizzano il circuito sono:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}[u(t) - Rx_1(t) - hx_2(t)]$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{J}[-qx_2(t) + hx_1(t)]$$

$$y(t) = \frac{60}{2\pi}x_2(t)$$

dove il termine  $hx_2(t)$  caratterizza la forza elettromotrice indotta generata nel circuito dalla rotazione dell'albero motore, il termine  $qx_2(t)$  la coppia di attrito del motore e il termine  $hx_1(t)$  la coppia impressa sul motore dal circuito.

Le matrici e i vettori che definiscono il sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{h}{L} \\ \frac{h}{J} & -\frac{q}{J} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{60}{2\pi} \end{bmatrix} \quad d = 0$$

Il sistema è asintoticamente stabile, dato che  $tr(A) = -\frac{R}{L} - \frac{q}{J} < 0$  e  $det(A) = \frac{Rq+h^2}{LJ} > 0$ .

#### CONTROLLO IN ANELLO APERTO

Fissato  $u(t) = \bar{u}$ , il sistema ammette un unico stato di equilibrio  $\bar{x}$  verso cui tende<sup>1</sup>.

I valori dei parametri sono:

$$R = 48 \text{ m}\Omega$$

$$L = 345 \text{ mH}$$

$$J = 8.37 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

$$q = 8.7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$h = 9.1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-1}$$

Calcoliamo pertanto il valore di equilibrio dell'uscita  $\bar{y}$  per  $\bar{u} = 1\text{V}$  ( $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$  e  $\bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u}$ ).

```
Rpar=48*10^(-3);  
Lpar=345*10^(-3);  
Jpar=8.37*10^(-7);  
qpar=8.7*10^(-5);  
hpar=9.1*10^(-3);
```

---

<sup>1</sup> In particolare:  $\bar{x}_1 = \frac{q}{Rq+h^2}\bar{u}$   $\bar{x}_2 = \frac{h}{Rq+h^2}\bar{u}$   $\bar{y} = \frac{60}{2\pi} \frac{h}{Rq+h^2}\bar{u}$

```
A=[-Rpar/Lpar -hpar/Lpar
    hpar/Jpar -qpar/Jpar];
b=[1/Lpar 0]';
c=[0 60/(2*pi)];
d=0;
```

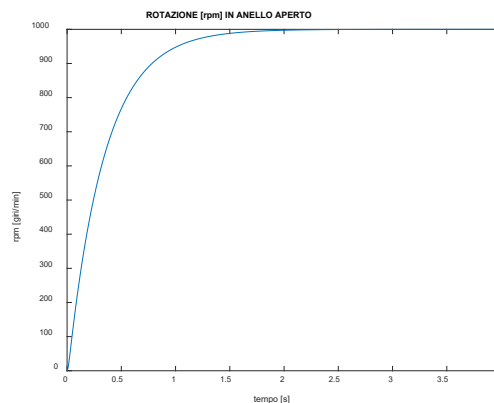
```
% calcolo dell'equilibrio
ueq=1;
xeq=-inv(A)*b*ueq;
yeq=c*xeq+d*ueq
```

Il valore a regime ottenuto per la velocità di rotazione dell'albero motore per unità di voltaggio applicato è quindi in linea con le specifiche del motore elettrico (fornite dal suo produttore): circa 1000 giri/min

Volendo quindi portare la velocità dell'albero motore  $y(t)$  a una velocità di rotazione desiderata  $\bar{w}$ , essendo  $\bar{y} = G(0)\bar{u}$ , basterà fissare il segnale di ingresso al valore  $\bar{u} = \frac{\bar{w}}{G(0)}$ .

La figura seguente mostra l'andamento dell'uscita  $y(t)$  da motore fermo (corrente e velocità iniziali nulle) a velocità di regime desiderata  $\bar{w}$  pari a 1000 giri/min.

```
[NUM,DEN]=ss2tf(A,b,c,d);
G=tf(NUM,DEN);
T=linspace(0,4,1000);
w=1000; % velocità desiderata
u=w/dcgain(G); % y=w=G(0)u -> u=w/G(0)
y_w=u*step(G,T);
figure(1);
plot(T,y_w); hold on; xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');
title('ROTAZIONE [rpm] IN ANELLO APERTO');
```



Da tale figura si può osservare che il tempo necessario per portare a regime il sistema (tempo di risposta) è troppo elevato rispetto a quello richiesto (0.5 secondi). Infatti, il tempo di risposta è dato da

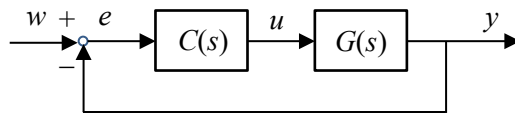
```
autov=eig(A);
autov_dom=max(abs(autov));
TD=-1/autov_dom;
TR=5*TD % TR è circa pari a 1.68s (troppo!)
```

### CONTROLLO IN ANELLO CHIUSO

Per portare la velocità di rotazione dell'albero motore a un valore desiderato in un tempo pari a circa mezzo secondo, utilizziamo un controllore ad azione proporzionale-integrale (PI)

$$C(s) = \frac{\mu}{s}(s + 3)$$

caratterizzante il seguente schema di controllo in anello chiuso



dove  $G(s)$  è la funzione di trasferimento del sistema assegnato.

Le funzioni di trasferimento sono:

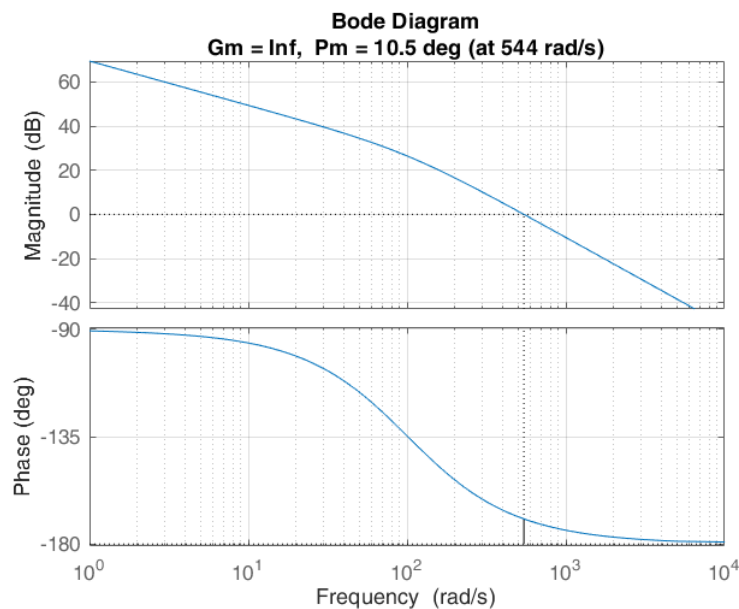
$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{\mu}{s}(s+3)G(s) \qquad Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}W(s)$$

Così facendo, la funzione di trasferimento di anello  $L(s)$  avrà un polo nell'origine e il sistema di controllo (se asintoticamente stabile) porterà l'uscita  $y$  al valore desiderato  $w$ . Inoltre, la presenza dello zero negativo in  $C(s)$ , farà aumentare la fase di  $L(i\omega)$ , favorendo così la asintotica stabilità del sistema di controllo ( $\varphi_c$  "alto"  $\rightarrow \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| > 0 \rightarrow$  asintotica stabilità)

Volendo per il sistema di controllo un tempo di risposta  $T_R = \frac{5}{\omega_c} = 0.5s$ , la pulsazione critica del sistema di controllo dovrà essere pari a  $\omega_c = \frac{5}{T_R} = 10 \text{ rad/s}$ .

Valutiamo pulsazione critica e stabilità del sistema di controllo per  $\mu = 1$ , tracciando i diagrammi di Bode della corrispondente funzione di trasferimento di anello  $L$ .

```
mu=1;
C=mu*tf([1 3],[1 0]);
L=C*G;
figure(2); margin(L); grid;
```



$\omega_c = 544 \text{ rad/s} \rightarrow$  va diminuita!

$\varphi_m = 10.5^\circ > 0 \rightarrow$  il sistema di controllo è asintoticamente stabile (per il criterio di Bode)

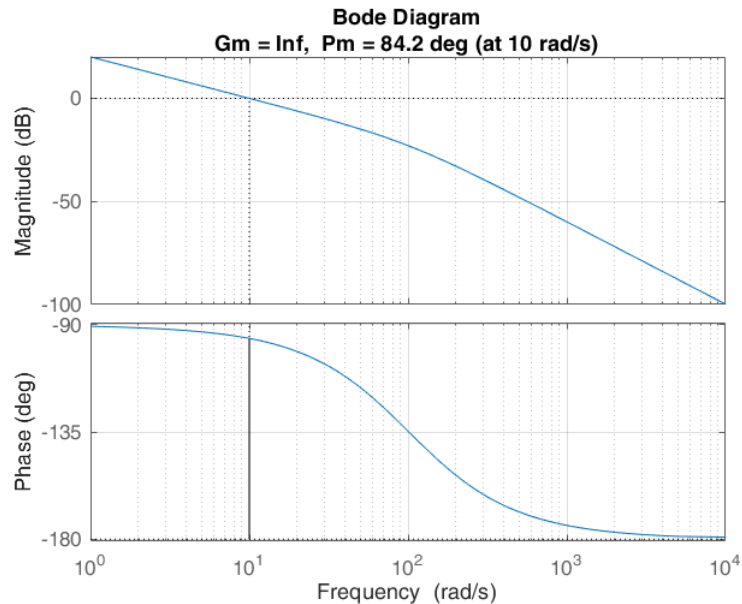
Valutiamo il  $|L(10i)|$

```
[mod, fase]=bode(L,10)
```

Dato che  $|L(10i)| = 296.37$ , affinché la pulsazione critica sia pari a 10, occorre dividere  $\mu = 1$  per tale valore; così facendo, il diagramma del modulo si abbassa portando la pulsazione critica al valore desiderato mentre il diagramma della fase resta inalterato.

I nuovi diagrammi di Bode di  $L$  sono ora dati da:

```
mu=mu/mod;
C=mu*tf([1 3],[1 0]);
L=C*G;
figure(3); margin(L); grid;
```



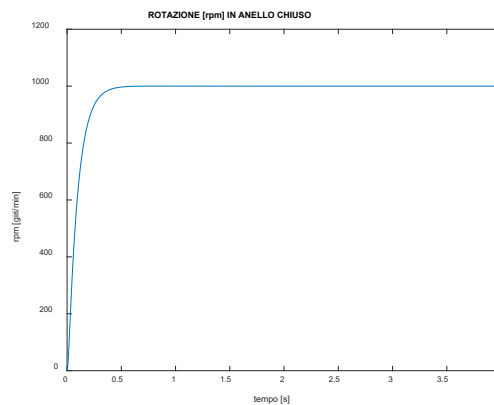
Ora

$\omega_c = 10 \text{ rad/s} \rightarrow$  la specifica sul tempo di risposta è soddisfatta

$\varphi_m = 84.2^\circ > 0 \rightarrow$  il sistema di controllo è asintoticamente stabile

Simuliamo ora il sistema di controllo per portare l'albero motore da fermo a velocità di rotazione pari a 1000 giri/min

```
y_C=w*step(feedback(L,1),T);
figure(4);
plot(T,y_C);
xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');
title('ROTAZIONE [rpm] IN ANELLO CHIUSO');
```



La velocità di rotazione dell'albero motore tende al valore desiderato ( $w = 1000 \text{ giri/min}$ ); il valore di regime viene effettivamente raggiunto in circa 0.5 s.

### RUOLO DEL DISTURBO (facoltativo)

Per valutare l'effetto sulla rotazione dell'elica di eventuali raffiche di vento caratterizzate da una velocità  $v(t)$  non nota (disturbo), introduciamo nel modello un termine che corrisponde alla coppia di attrito generata sull'albero motore dalla raffica stessa. Le equazioni (in anello aperto) diventano quindi:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \frac{1}{L}[u(t) - Rx_1(t) - hx_2(t)] \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{J}[-qx_2(t) + hx_1(t) - kv(t)] \\ y(t) &= \frac{60}{2\pi}x_2(t)\end{aligned}$$

dove il coefficiente di attrito  $k$  è pari a  $0.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m s}^{-1}$ .

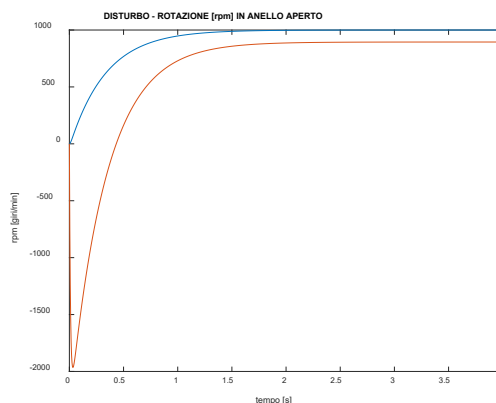
Ciò corrisponde a introdurre un vettore  $b_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{J} \end{bmatrix}$  che descrive il ruolo di  $v(t)$  sull'evoluzione dello stato  $x(t)$  del sistema ( $v(t)$  è, di fatto, un ulteriore ingresso che agisce sul sistema oltre a  $u(t)$ ).

Con disturbo costante  $\bar{v}$ , l'uscita di regime diventa pari a  $\bar{y} = G(0)\bar{u} + G_v(0)\bar{v}$  dove  $G(s)$  è la funzione di trasferimento da  $u$  a  $y$  e  $G_v(s)$  quella da  $v$  a  $y^2$ , definita dalle matrici  $(A, b_v, c, d)$ . Pertanto, in assenza di controllo, il sistema ritrova in uscita l'effetto del disturbo.

Verifichiamo ciò via simulazione, ipotizzando che l'elica, partendo da ferma e volendo raggiungere una velocità di rotazione a regime di 1000 giri/min, sia sottoposta a una raffica di vento costante  $v$  pari per esempio a 100.

```
% disturbo costante: raffica di vento sull'elica da motore fermo a 1000 giri/min (w)
```

```
kpar=0.2*10^(-3);  
bv=[0 -kpar/Jpar]';  
  
[NUMv, DENv]=ss2tf(A,bv,c,d);  
Gv=tf(NUMv,DENv); % fdt da v a y  
v=100;  
y_v=v*step(Gv,T);  
ytot=y_w+y_v;  
figure(1); hold on;  
plot(T,ytot);  
title('DISTURBO - ROTAZIONE [rpm] IN ANELLO APERTO');  
% in anello aperto il disturbo "si ritrova" sull'uscita
```



---

<sup>2</sup> Applicando l'operatore  $s$  alle equazioni di stato si ottiene:  $G(s) = \frac{60}{2\pi} \frac{h}{JL} \frac{1}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{q}{J}\right)s + \frac{Rq+h^2}{LJ}} = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$  e

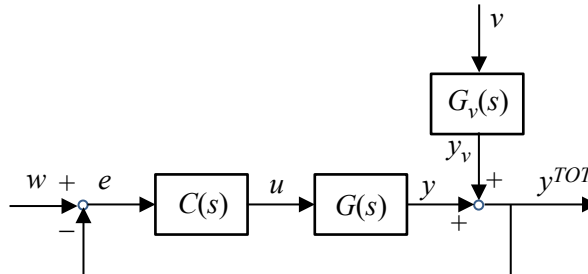
$G_v(s) = -\frac{60}{2\pi} \frac{k}{JL} \frac{Ls+R}{s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{q}{J}\right)s + \frac{Rq+h^2}{LJ}} = \frac{N_v(s)}{\Delta(s)}$ , con  $N(s) = \frac{60}{2\pi} \frac{h}{JL}$ ,  $N_v(s) = -\frac{60}{2\pi} \frac{k}{JL} (Ls+R)$  e  $\Delta(s) = s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{q}{J}\right)s + \frac{Rq+h^2}{LJ}$

La velocità di rotazione dell'albero motore a regime, pari a 894.6, è ora differente da quella desiderata (risente del disturbo).

$$y = \text{dcgain}(G) * u + \text{dcgain}(G_v) * v$$

Il tempo di risposta (dipendente dalla sola matrice di stato  $A$ ) non cambia.

In anello chiuso, lo schema di controllo è ora dato da

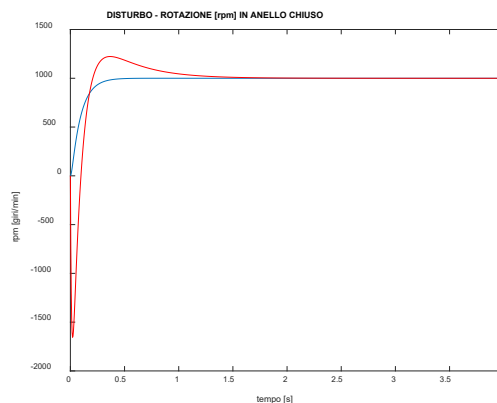


Le funzioni di trasferimento sono:

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{\mu}{s}(s+3)G(s) \quad Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}W(s) + \frac{G_v(s)}{1+L(s)}V(s)$$

Come già detto, la funzione di trasferimento di anello  $L(s)$  ha un polo nell'origine; pertanto, il sistema di controllo progettato in precedenza porterà a regime l'uscita  $y$  al valore desiderato  $w$  annullando gli effetti dovuti al disturbo (raffica di vento). Simulando, si ha:

```
% simulazione con disturbo
y_v=v*step(Gv*feedback(1,L),T); % la funzione di trasferimento da v a y è Gv/(1+L)
ytot=y_C+y_v;
figure(4); hold on;
plot(T,ytot,'r');
xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');
title('DISTURBO - ROTAZIONE [rpm] IN ANELLO CHIUSO');
```



In entrambi i casi (assenza di disturbo in blu e presenza di disturbo in rosso) la velocità di rotazione dell'albero motore tende al valore desiderato ( $w = 1000$  giri/min); in particolare, quindi, il sistema di controllo è in grado di azzerare a regime l'effetto della raffica di vento sulla velocità di rotazione.

In assenza di disturbo (linea blu), il valore di regime viene effettivamente raggiunto in circa 0.5 s.

Tuttavia, in presenza di disturbo (linea rossa), il tempo necessario affinché ciò avvenga resta pari al tempo di risposta del sistema (troppo elevato rispetto alla specifica richiesta).

Ciò è dovuto al fatto che i poli della funzione di trasferimento dal disturbo  $v$  all'uscita  $y$

$$\frac{G_v(s)}{1 + L(s)}$$

sono dati dalle radici di  $1 + L(s) = 0$  e dai poli di  $G_v(s)$ .

I poli di  $G_v(s)$  sono in

`poliGv=roots(DENV)`

```
-101.1022
  -2.9795
```

Pertanto  $F_{vy}(s)$  ha polo dominante circa in  $-2.9795$  (era il polo dominante del sistema in assenza di controllo) a cui consegue un tempo di risposta circa pari a  $-\frac{5}{-2.9795} = 1.68$  s.