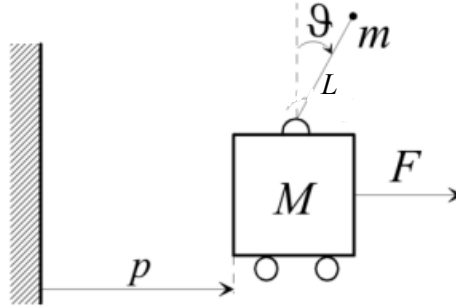


Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica

Stabilizzazione di un pendolo inverso – Soluzioni

Si consideri il sistema meccanico (carrello con pendolo inverso) riportato in figura:



Il carrello, di massa M , è in moto rettilineo sotto l'azione di una forza F e porta incernierata un'asta di massa trascurabile e lunghezza L , al cui estremo è presente una massa concentrata di valore m . Detta p la posizione del carrello e ϑ la posizione angolare dell'asta, misurata come in figura, il modello matematico del sistema è il seguente:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{p} - mL\dot{\vartheta}^2 \sin(\vartheta) + mL\ddot{\vartheta} \cos(\vartheta) = F \\ mL^2\ddot{\vartheta} + mL\ddot{p} \cos(\vartheta) - mgL \sin(\vartheta) = 0 \end{cases}$$

Si noti che il sistema è non lineare; linearizzando le equazioni intorno allo stato di equilibrio caratterizzato da posizioni e velocità (lineari ed angolari) nulle e da forza nulla, esplicitando le derivate seconde si ottiene

$$\begin{cases} \delta\ddot{p} = -\frac{m}{M}g\delta\vartheta + \frac{1}{M}\delta F \\ \delta\ddot{\vartheta} = \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}\delta\vartheta - \frac{1}{LM}\delta F \end{cases}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta p & x_2 &= \delta \dot{p} & x_3 &= \delta \vartheta & x_4 &= \delta \dot{\vartheta}, \\ u &= \delta F & y &= \delta p \end{aligned}$$

le equazioni di stato e uscita che caratterizzano il sistema sono

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{m}{M}g x_3 + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}x_3 - \frac{1}{LM}u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Siano $M = 10$ kg, $m = 1$ kg, $L = 1$ m, $g = 9.81$ m s⁻².

1. Le matrici del sistema sono le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{g}{L}\frac{M+m}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad d = 0$$

2. Si verifichi che l'equilibrio è instabile.

La matrice A è triangolare a blocchi; la matrice in basso a destra è fortemente instabile (avendo determinante negativo) così come A . Pertanto, l'equilibrio è instabile.

```
clear; close all;
%% dati del problema
M = 10; % Massa del carrello [kg]
m = 1; % massa all'estremo dell'asta [kg]
L = 1; % lunghezza dell'asta [m]
g = 9.81; % accelerazione di gravità [m/s^2]
%% equazioni del sistema in forma matriciale
A = [0 1 0 0;
     0 0 -m/M*g 0;
     0 0 0 1;
     0 0 g/L*(m+M)/M 0];
b = [0 1/M 0 -1/(L*M)]';
c = [1 0 0 0];
d = 0;
%% stabilità del sistema
autovalori = eig(A) % il sistema è instabile

0
0
3.2850
-3.2850
```

Il sistema linearizzato è fortemente instabile (avendo un autovalore a parte reale positiva) e l'equilibrio (0,0) è instabile per il sistema non lineare.

3. Si verifichi che il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile.

Valutiamo il determinante della matrice di raggiungibilità

```
R = ctrb(A,b);
det(R)
% il sistema è completamente raggiungibile
```

Essendo il determinante della matrice di raggiungibilità non nullo, si ha la completa raggiungibilità del sistema.

Valutiamo il determinante della matrice di osservabilità

```
O = obsv(A,c);
det(O)
% il sistema è completamente osservabile
```

Essendo il determinante della matrice di osservabilità non nullo, si ha la completa osservabilità del sistema.

4. Con riferimento al punto precedente, si progetti un regolatore lineare (composto da ricostruttore dello stato l e da legge di controllo k) tale che

- a partire dalle misure di $F(u)$ e $\delta p(x_1 = y)$, sia possibile ricostruire tutto lo stato del sistema al più in 0.5s;
- la legge di controllo k , porti il sistema regolato all'equilibrio $(0, 0)$ al più in 5s.

Secondo le specifiche richieste si dovrà avere:

- tempo di risposta della dinamica dell'errore di ricostruzione al più pari a 0.5 $\rightarrow T_R^{A+lc} = 0.5 \rightarrow T_D^{A+lc} = \frac{T_R^{A+lc}}{5} = 0.1 \rightarrow \mathbb{R}(\lambda_D^{A+lc}) = -\frac{1}{T_D^{A+lc}} = -10 \rightarrow \sigma_{A+lc} = \{-10, -10, -10, -10\}$
- tempo di risposta del sistema regolato al più pari a 5 $\rightarrow T_R^{A+bk} = 5$ (essendo già T_R^{A+lc} inferiore a 5) $\rightarrow T_D^{A+bk} = \frac{T_R^{A+bk}}{5} = 1 \rightarrow \mathbb{R}(\lambda_D^{A+bk}) = -\frac{1}{T_D^{A+bk}} = -1 \rightarrow \sigma_{A+bk} = \{-1, -1, -1, -1\}$

Per progettare una retroazione dello stato (legge di controllo k) che assegni gli autovalori come chiesti si utilizza la formula di Ackermann e il comando matlab `acker()` (digitare `help acker` per una discussione dettagliata sull'uso del comando). In particolare, il comando `acker()` fa riferimento a una legge di controllo $u = -\tilde{k}x$ e non $u = kx$ come visto a lezione. Pertanto, per ottenere k occorrerà cambiare segno al vettore \tilde{k} ottenuto.

```
%% Progetto della legge di controllo
autov_controllore = [-1 -1 -1 -1];
ktilde = acker(A, b, autov_controllore);
k = -ktilde;
eig(A + b*k)
(sono pari agli autovalori assegnati)
```

In modo analogo, cioè mediante il comando `acker()`, si può ottenere il ricostruttore dello stato.

Il problema della stabilizzazione dell'errore di stima del ricostruttore è infatti il duale del problema della stabilizzazione del sistema affrontato al punto precedente. Osserviamo che $(A + lc)^T$ ha gli stessi autovalori di $(A + lc)$. Ma $(A + lc)^T = A^T + c^T l^T$ dove A^T , c^T e l^T sono in posizione corrispondente ad A , b e k per l'assegnamento degli autovalori nella legge di controllo. Pertanto basta applicare la formula di Ackermann alla coppia (A^T, c^T) per ottenere l^T cambiato di segno.

```
%% Progetto del ricostruttore dello stato
autov_ricostruttore = [-10 -10 -10 -10];
ltildeT = acker(A', c', autov_ricostruttore);
lT = -ltildeT;
l = lT'
eig(A + l*c)
(sono pari agli autovalori assegnati)
```

5. Rappresentare l'andamento della posizione angolare dell'asta del sistema linearizzato regolato,

partendo da condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, note con un'incertezza pari a $\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$.

Per rappresentare l'andamento della posizione dell'asta del sistema linearizzato regolato, occorre definirne le matrici. Utilizzando come variabili di stato del sistema regolato la stima dello stato \hat{x} e l'errore di ricostruzione e ($e = \hat{x} - x$), si ottengono le seguenti equazioni (vedi teoria):

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A + bK)\hat{x} + lce + bv \\ \dot{e} &= (A + lc)e\end{aligned}$$

Volendo visualizzare la posizione angolare dell'asta, si ha: $y = x_3 = \hat{x}_3 - e_3$

NOTA: L'errore di ricostruzione andrà a zero, pertanto, affinché anche la stima dello stato converga (come lo stato) a 0, occorrerà imporre al sistema regolato un ingresso v nullo.

Le matrici per il sistema regolato sono date da:

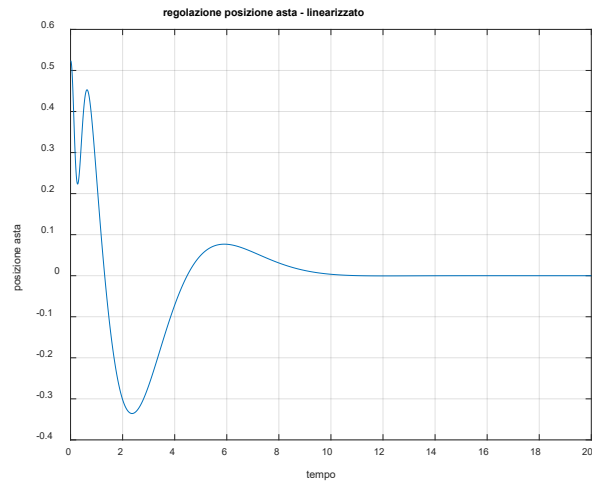
$$\begin{aligned}A_{REG} &= \begin{bmatrix} A + bk & lc \\ 0 & A + lc \end{bmatrix} & b_{REG} &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \\ c_{REG} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & d_{REG} &= 0\end{aligned}$$

Fissiamo inizialmente le condizioni iniziali del sistema prossime allo stato di equilibrio

$$e(0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} \quad \hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

e simuliamo il sistema.

```
AREG=[A+b*k      l*c
      zeros(4,4)  A+l*c];
bREG=[b
      zeros(4,1)];
cREG=[0 0 1 0 0 0 -1 0]; % l'uscita è x3=xhat3-e3: posizione angolare
dell'asta
dREG=0;
sistemaREG=ss(AREG,bREG,cREG,dREG);
x0 = [0 0 pi/6 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
T=[0:0.01:20];
v=zeros(size(T));
[YREG,T,XREG]=lsim(sistemaREG,v,T,[xhat0;e0]);
figure(1); plot(T,YREG); hold on;
xlabel('tempo'); ylabel('posizione asta'); title('regolazione posizione
asta - linearizzato');
grid;
```

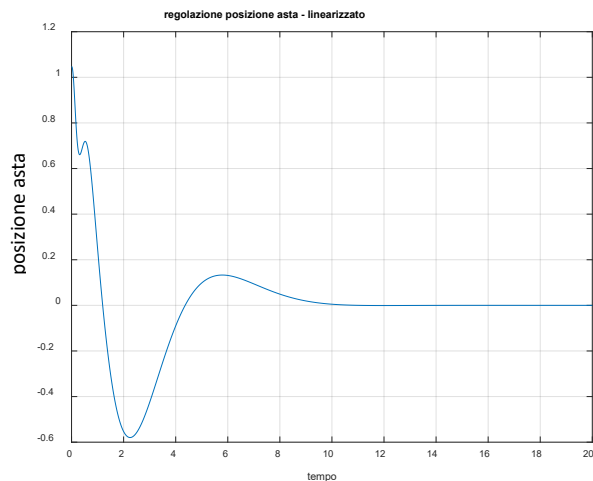


Fissiamo ora invece le condizioni iniziali a valori più distanti dall'equilibrio

$$\hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

e simuliamo il sistema.

```
x0 = [0 0 pi/3 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
[YREG,T,XREG]=lsim(sistemaREG,v,T,[xhat0;e0]);
figure(2); plot(T,YREG); hold on;
xlabel('tempo'); ylabel('posizione'); title('regolazione posizione asta -
linearizzato');
grid;
```



In entrambi i casi il sistema linearizzato regolato riporta l'asta in posizione verticale. Se ciò non accadesse, avremmo commesso qualche errore nell'implementazione del sistema.

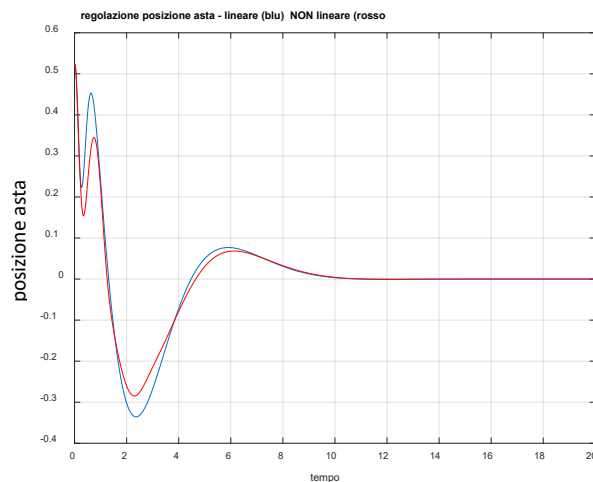
Il sistema linearizzato però non esiste nella realtà, è solo un'approssimazione matematica del sistema non lineare valida nell'intorno dell'equilibrio considerato. La bontà della regolazione va dunque valutata in relazione alle performance che otteniamo sul sistema non lineare.

6. Ripetere il punto precedente per il sistema non lineare.

Cerchiamo ora di capire come si comporta il regolatore da noi progettato se utilizzato sul sistema non lineare (file `ese_pendolo_carrello_modello.m`).

Per condizioni iniziali vicine all'equilibrio, $\hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$, si ha

```
Tfin=20;
x0 = [0 0 pi/6 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
xin=[xhat0;x0];
[temponL,xNL] = ode45('ese_carrello_pendolo_modello',[0 Tfin],xin);
figure(1); plot(temponL,xNL(:,7),'r');
xlabel('tempo'); ylabel('posizione'); title('regolazione posizione asta -
lineare (blu) NON lineare (rosso);
```



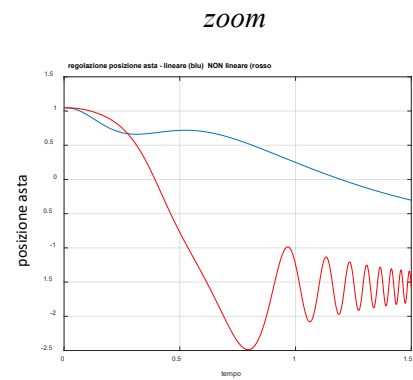
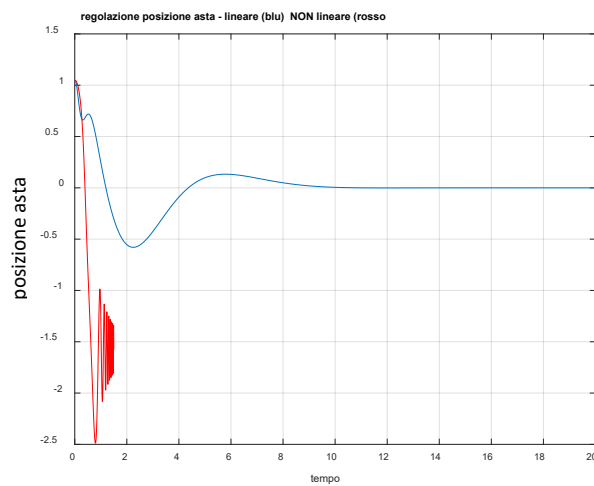
Quindi, partendo da condizioni iniziali vicine all'equilibrio e con piccola incertezza sullo stato, è possibile stabilizzare l'asta in posizione verticale anche nel caso non lineare (incertezze maggiori non porterebbero allo stesso risultato!).

Tuttavia, partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio

$\hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$, si ha

```
Tfin=1.5;
x0 = [0 0 pi/3 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
xin=[xhat0;x0];
[temponL,xNL] = ode45('problema3_carrello_pendolo_modello',[0 Tfin],xin);
figure(2); plot(temponL,xNL(:,7),'r');
```

```
xlabel('tempo'); ylabel('posizione'); title('regolazione posizione asta -  
lineare (blu) NON lineare (rosso');
```



Pertanto, la stabilizzazione del sistema non lineare mediante il regolatore lineare da noi progettato è possibile solo quando la condizione iniziale è vicina all'equilibrio e il grado di incertezza nella stima dello stato è piccola.