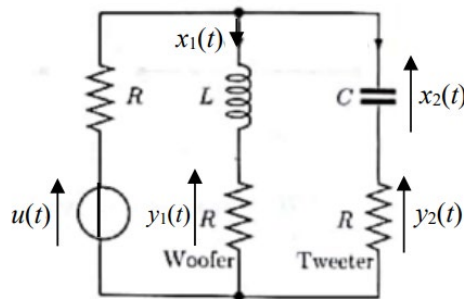


**Progettazione di un sistema di riproduzione audio – Soluzioni**

Nel circuito elettrico in figura



indichiamo con  $x_1(t)$  la corrente che attraversa l'induttore e con  $x_2(t)$  la tensione ai capi del condensatore. Sia inoltre  $u(t)$  la tensione applicata dal generatore di tensione ideale al circuito, mentre  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  le tensioni ai capi di woofer e tweeter, rispettivamente. Le equazioni di stato e uscita che descrivono il circuito elettrico sono<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u \\ y_1 &= Rx_1 \\ y_2 &= -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u\end{aligned}$$

da cui

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3R}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L} \\ \frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \quad c_1 = [R \quad 0] \quad c_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad d_1 = 0 \quad d_2 = \frac{1}{2}$$

Scriviamo il modello in Matlab

```
% parametri
R=8;
C=3.76*10^(-6);
L=7.5*10^(-4);

% sistema
A=[-3*R/(2*L)    1/(2*L)
   -1/(2*C)      -1/(2*R*C)];
b=[1/(2*L)       1/(2*R*C)]';
c1=[R    0];
```

$$^1 \dot{x}_1 = \frac{1}{L}[u - R(x_1 + C\dot{x}_2) - Rx_1] \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left[ \frac{Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2}{R} \right] \quad (2)$$

$$(1) + \frac{RC}{L} \cdot (2) \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{3R}{2L}x_1 + \frac{1}{2L}x_2 + \frac{1}{2L}u$$

$$\frac{L}{RC} \cdot (1) - (2) \rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{1}{2C}x_1 - \frac{1}{2RC}x_2 + \frac{1}{2RC}u$$

$$y_1 = Rx_1$$

$$y_2 = Rx_1 + L\dot{x}_1 - x_2 = -\frac{R}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}u$$

```

c2=[-R/2  -1/2];
d1=0;
d2=1/2;

woofer=ss(A,b,c1,d1);
tweeter=ss(A,b,c2,d2);

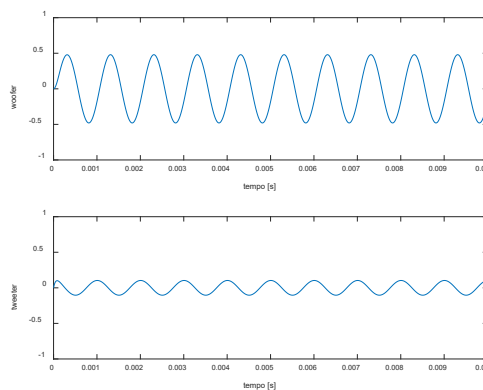
```

Per verificare che la frequenza di crossover  $f_{cr}$  sia pari a quella richiesta, 0.5 kHz, simuliamo il sistema alimentando il circuito con un segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a 1 kHz (alta frequenza)<sup>2</sup>. In caso di buon funzionamento del sistema di riproduzione audio, tale segnale deve essere filtrato dal woofer e passare bene nel tweeter.

```

% simulazione con ingresso sinusoidale di frequenza 1 kHz
freq=1000; periodo=1/freq;
T=linspace(0,10*periodo,1000);
U=sin(2*pi*freq*T);
Ywoofer=lsim(woofer,U,T);
Ytweeter=lsim(tweeter,U,T);
figure;
subplot(2,1,1); plot(T,Ywoofer); xlabel('tempo [s]'); ylabel('woofer'); ylim([-1 1]);
subplot(2,1,2); plot(T,Ytweeter); xlabel('tempo [s]'); ylabel('tweeter');
ylim([-1 1]);

```



La simulazione mostra tuttavia un risultato opposto a quello aspettato: il segnale di ingresso passa bene nel woofer e viene attenuato dal tweeter. Si può anche ascoltare ciò che accade utilizzando il file sonoro\_f.m

```
sonoro_f(1000,R,L,C);
```

(l'argomento, 1000, è la frequenza scelta per il segnale in ingresso)

Il primo suono è quello generato dal segnale di ingresso a 1 kHz, il secondo è il suono in uscita dal woofer, il terzo è quello in uscita dal tweeter. Se il dispositivo di riproduzione funzionasse correttamente il secondo segnale (uscita dal woofer) dovrebbe essere attutito rispetto al segnale di ingresso mentre il terzo (uscita dal tweeter) dovrebbe essere pari a questo. Ma così non è, anzi è il contrario!

Anche aumentando la frequenza del segnale di ingresso, per esempio a 1.5 kHz, non si nota differenza. Solo per frequenze molto elevate (4 kHz) il suono viene filtrato dal woofer passando bene nel tweeter.

---

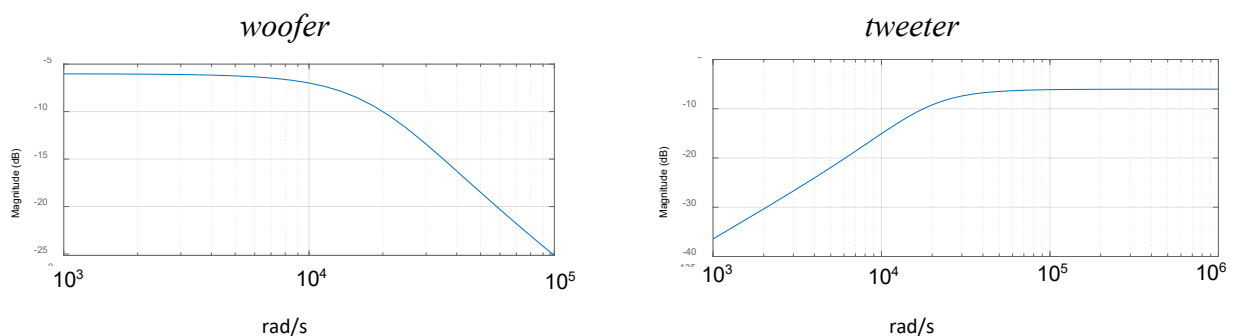
<sup>2</sup> Se la frequenza delle oscillazioni è di 1 kHz, il periodo è pari a 0.001 s. Volendo visualizzare 10 oscillazioni, l'intervallo di tempo di simulazione è pari a 0.01 s.

Mediante i diagrammi di Bode del modulo delle funzioni di trasferimento  $G_1$  da  $u$  a  $y_1$  e  $G_2$  da  $u$  a  $y_2$  è possibile giustificare tali comportamenti. Tracciamo i diagrammi con Matlab<sup>3</sup> e valutiamo la banda passante<sup>4</sup> per  $G_1$  e  $G_2$ .

```
% Diagrammi di Bode per il woofer
figure; bode(woofer); grid;

% Diagrammi di Bode per il tweeter
figure; bode(tweeter); grid;

% calcolo della banda passante
% woofer
V=linspace(-4,10,50000); W=10.^V; % V=log10(W) -> W=10^V
[MAG, PHASE, OMEGA]=bode(woofer,W);
ind=max(find(MAG>MAG(1)/sqrt(2)));
Bp_woofer=OMEGA(ind);
% tweeter
[MAG, PHASE, OMEGA]=bode(tweeter,W);
ind=min(find(MAG>MAG(length(MAG))/sqrt(2)));
Bp_tweeter=OMEGA(ind);
```



I rami del circuito di woofer e di tweeter si comportano come filtri passa basso e passa alto, rispettivamente. L'estremo superiore della banda passante per il woofer ( $Bp\_woofer$ ) è pari a  $1.7211 \cdot 10^4$  rad/s, mentre l'estremo inferiore della banda passante per il tweeter ( $Bp\_tweeter$ ) è pari a  $2.0603 \cdot 10^4$  rad/s.

Tali estremi si trovano in prossimità della pulsazione naturale  $\omega_n$  dei due poli complessi coniugati ( $p_{1,2} = a \pm ib$  con  $\omega_n = \sqrt{a^2 + b^2}$ ) che caratterizzano le funzioni di trasferimento  $G_1$  e  $G_2$  che, salvo semplificazioni numeratore/denominatore, sono pari agli autovalori della matrice di stato  $A$ . Infatti:

```
poli=eig(A)
poli =
    1.0e+04 *
   -1.6311 + 0.9410i
   -1.6311 - 0.9410i
```

da cui

```
omegan=sqrt(real(poli(1,1))^2+imag(poli(1,1))^2)
omegan =
```

<sup>3</sup> Il comando Matlab con il quale si calcola la funzione di trasferimento è *tf*. In questo esempio:

```
% Woofer [NUM1,DEN1]=ss2tf(A,b,c1,d1); sistema1=tf(NUM1,DEN1);
% Tweeter [NUM2,DEN2]=ss2tf(A,b,c2,d2); sistema2=tf(NUM2,DEN2);
```

<sup>4</sup> Banda passante  $B = \{\omega / \frac{G(i\omega)^{MAX}}{\sqrt{2}} \leq G(i\omega) \leq G(i\omega)^{MAX}\}$

1.8831e+04

Pertanto, approssimando la pulsazione di crossing  $\omega_{cr}$  con al pulsazione naturale  $\omega_n$ , la frequenza di crossing per il dispositivo assegnato è circa pari a  $f_{cr} = \frac{1.883 \cdot 10^4}{2\pi} \sim 3$  kHz; il sistema di riproduzione audio non soddisfa la specifica di progetto richiesta ( $f_{cr} = 0.5$  kHz).

Nel progettare un sistema di riproduzione che ponga la frequenza di crossing  $f_{cr}$  in 0.5 kHz, si può, ad esempio, scegliere  $L$  e  $C$  facendo in modo che i due poli (gli autovalori di  $A$ ) siano reali coincidenti in  $\omega_{cr} = 2\pi f_{cr} = 2\pi \cdot 0.5 \cdot 10^3 \sim 3.14 \cdot 10^3$  rad/s. In tal modo i diagrammi di Bode del woofer e del tweeter subiranno un cambio di pendenza massimo di  $-40$  dB/dec per il woofer e di  $+40$  dB/dec per il tweeter proprio in  $\omega_{cr}$  così che la banda passante sarà, rispettivamente, circa pari a  $(0, \omega_{cr})$  e  $(\omega_{cr}, +\infty)$ .

La matrice  $A = \begin{bmatrix} -\frac{3R}{2L} & \frac{1}{2L} \\ -\frac{1}{2C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix}$  ha

$$tr(A) = -\frac{3R}{2L} - \frac{1}{2RC}$$

$$det(A) = \frac{1}{LC}$$

Volendo porre  $p_1 = p_2 = -\omega_{cr}$ , si ottiene

$$tr(A) = -\frac{3R}{2L} - \frac{1}{2RC} = p_1 + p_2 = -2\omega_{cr}$$

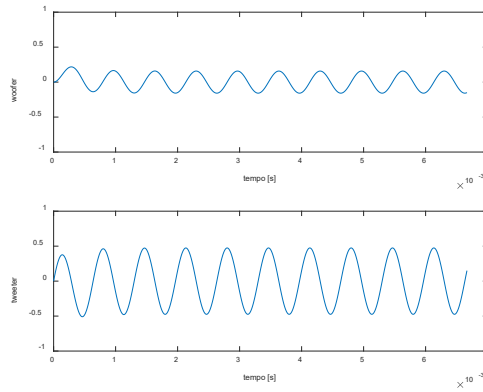
$$det(A) = \frac{1}{LC} = p_1 p_2 = \omega_{cr}^2$$

Una possibile scelta è:  $C = \frac{1}{R\omega_{cr}} \quad L = R^2 C$

```
R=8;
fcr=500;
omegacr=2*pi*fcr;
C=1/(R*omegacr);
L=R^2*C;
A=[-3*R/(2*L)    1/(2*L)
   -1/(2*C)      -1/(2*R*C)];
b=[1/(2*L)        1/(2*R*C)]';
woofer=ss(A,b,c1,d1);
tweeter=ss(A,b,c2,d2);
```

Vediamo come viene ora filtrato il segnale sinusoidale in ingresso di frequenza pari a 1 kHz.

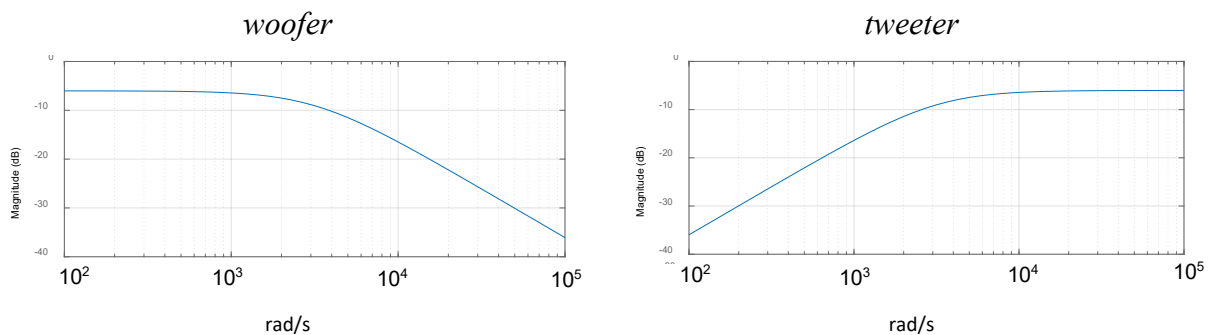
```
Ywoofer=lsim(woofer,U,T);
Ytweeter=lsim(tweeter,U,T);
figure;
subplot(2,1,1); plot(T,Ywoofer); xlabel('tempo [s]'); ylabel('woofer');
ylim([-1 1]);
subplot(2,1,2); plot(T,Ytweeter); xlabel('tempo [s]'); ylabel('tweeter');
ylim([-1 1]);
```



La simulazione mostra il risultato atteso: il segnale di ingresso viene filtrato dal woofer e passa bene nel tweeter. Si può anche ascoltare con `sonoro_f(1000, R, L, C)`, oppure ripetere l'esperimento per frequenza pari a 2000 Hz. Al contrario, segnali in ingresso con frequenza inferiore a 500 Hz sono filtrati dal tweeter (`sonoro_f(200, R, L, C)`). Si può infine ascoltare l'effetto relativo a un ingresso con frequenza variabile da 100 a 2000 Hz con `sweep(R, L, C)`.

Mediante i diagrammi di Bode del modulo delle funzioni di trasferimento è possibile giustificare tali comportamenti.

```
figure; bode(woofer); grid;
figure; bode(tweeter); grid;
```



La banda passante (delimitata superiormente da  $Bp\_woofer$  e inferiormente da  $Bp\_tweeter$ , per il woofer e tweeter, rispettivamente) è ora circa data da  $\omega_{cr} = 3.14 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow f_{cr} = 500 \text{ Hz}$

```
% woofer
V=linspace(-4,10,50000); W=10.^V; % V=log10(W) -> W=10^V
[MAG,PHASE,OMEGA]=bode(woofer,W);
ind=max(find(MAG>MAG(1)/sqrt(2)));
Bp_woofer=OMEGA(ind);
% tweeter
[MAG,PHASE,OMEGA]=bode(tweeter,W);
ind=min(find(MAG>MAG(length(MAG))/sqrt(2)));
Bp_tweeter=OMEGA(ind);
```

Infine, il comando `sonoro(R, L, C)` dimostra come un segnale in ingresso a frequenza variabile (da bassa a alta) venga filtrato alle alte frequenze dal woofer e alle basse frequenze dal tweeter.

