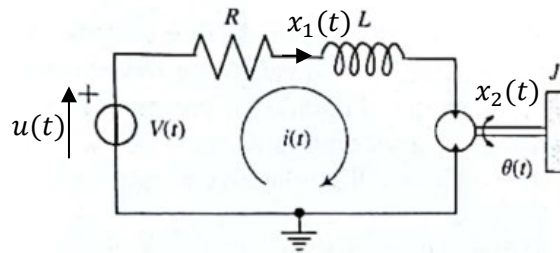


Controllo della velocità di rotazione dell'albero id un motore elettrico – Soluzioni

Indichiamo con $u(t)$ la tensione applicata al circuito (in Volt [V]), con $x_1(t)$ la corrente che attraversa il circuito (in Ampere [A]) e con $x_2(t)$ la velocità dell'albero motore (in [rad/s]). Sia $y(t)$ la variabile di uscita da controllare (in giri/min) e $v(t)$ la velocità del vento che genera una coppia di attrito sull'albero motore (disturbo).



Le equazioni di stato e di uscita che caratterizzano il circuito sono:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} [u(t) - R x_1(t) - h x_2(t)]$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{J} [-q x_2(t) + h x_1(t) - k v(t)]$$

$$y(t) = \frac{60}{2\pi} x_2(t)$$

dove il termine $h x_2(t)$ caratterizza la forza elettromotrice indotta generata nel circuito dalla rotazione dell'albero motore, il termine $q x_2(t)$ la coppia di attrito, il termine $h x_1(t)$ la coppia impressa sul motore dal circuito e il termine $k v(t)$ la coppia di attrito generata sull'albero motore dalla raffica di vento.

Le matrici e i vettori che definiscono il sistema sono:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{h}{L} \\ \frac{h}{J} & -\frac{q}{J} \end{bmatrix} \quad b_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{J} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{60}{2\pi} \end{bmatrix} \quad d = 0$$

Il sistema è asintoticamente stabile, dato che $tr(A) = -\frac{R}{L} - \frac{q}{J} < 0$ e $det(A) = \frac{Rq + h^2}{LJ} > 0$.

CONTROLLO IN ANELLO APERTO

In assenza di disturbo ($v(t) = 0$), fissato $u(t) = \bar{u}$, il sistema ammette un unico stato di equilibrio \bar{x} verso cui tende. In particolare,

$$\bar{x}_1 = \frac{q}{Rq + h^2} \bar{u} \quad \bar{x}_2 = \frac{h}{Rq + h^2} \bar{u} \quad \bar{y} = \frac{60}{2\pi} \frac{h}{Rq + h^2} \bar{u}$$

I valori dei parametri sono i seguenti:

$$\begin{array}{lll} R = 48 \text{ m}\Omega & L = 750 \text{ mH} & J = 8.37 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \\ q = 8.7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} & h = 9.1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} & k = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \end{array}$$

In assenza di disturbo, il valore di equilibrio dell'uscita (valutato per $\bar{u} = 1V$) è $\bar{y} \sim 1000$ giri/min.

```
R=48*10^(-3);
L=75*10^(-2);
J=8.37*10^(-7);
q=8.7*10^(-5);
h=9.1*10^(-3);
```

```

k=0.2*10^(-3);
A=[-R/L  -h/L
    h/J   -q/J];
bu=[1/L  0]';           % ruolo di u sullo stato
bv=[0  -k/J]';          % ruolo di d sullo stato
c=[0  60/(2*pi)];       % velocità albero motore y=x2*60/(2*pi)
d=0;
% equilibrio in assenza di disturbo
ueq=1;                  % tensione di ingresso pari a 1V
xeq=-inv(A)*bu*ueq;
yeq=c*xeq+d*ueq;        % giri/min albero motore
yeq

```

Il valore a regime ottenuto per la velocità di rotazione dell'albero motore per unità di voltaggio applicato è quindi in linea con le specifiche del motore elettrico (fornite dal suo produttore).

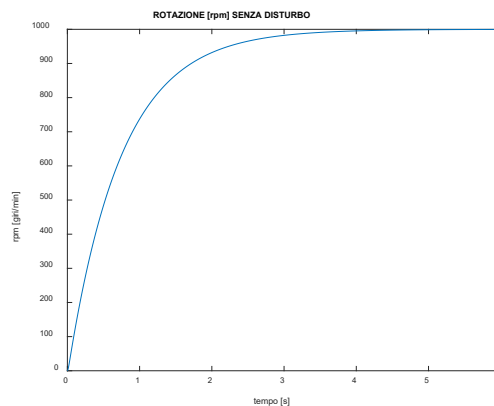
Volendo quindi portare la velocità dell'albero motore $y(t)$ a una velocità di rotazione desiderata \bar{w} , essendo $\bar{y} = G(0)\bar{u}$, basterà fissare il segnale di ingresso al valore $\bar{u} = \frac{\bar{w}}{G(0)}$.

La figura seguente mostra quanto trovato attraverso una simulazione.

```

% simulazione: da motore fermo a 1000 giri/min (w) in assenza di disturbo
[NUM,DEN]=ss2tf(A,bu,c,d);
G=tf(NUM,DEN);           % fdt da w a y
T=linspace(0,6,1000);
w=1000;                  % velocità desiderata
u=w/dcgain(G);           % y=G(0)u  -> u=w/G(0)
y_w=u*step(G,T);
figure(1);
plot(T,y_w); hold on; xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');
title('ROTAZIONE [rpm] SENZA DISTURBO');

```



Tuttavia, il tempo necessario per portare a regime il sistema (tempo di risposta) è troppo elevato (circa 3.7 secondi)

```

% calcolo del tempo di risposta
autov=eig(A);
autov_dom=max(abs(autov));
TD=-1/autov_dom;
TR=5*TD           % TR è circa pari a 3.7s (troppo!)

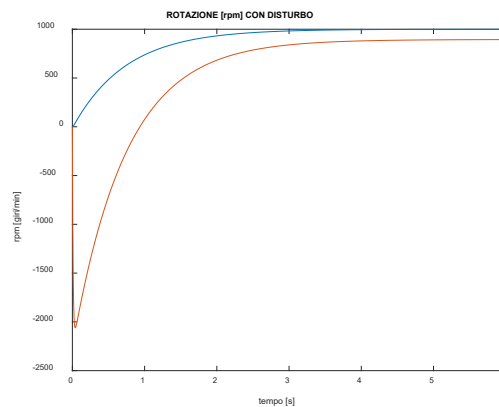
```

Inoltre, se sull'elica applicata all'albero motore agisse, come disturbo $v(t)$, una raffica di vento (di intensità non nota), sull'albero motore agirebbe una coppia di attrito $k v(t)$.

Con disturbo costante \bar{v} , l'uscita di regime diventerebbe pari a $\bar{y} = G(0)\bar{u} + G_d(0)\bar{v}$ dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento da u a y e $G_d(s)$ quella da v a y ¹. Pertanto, in assenza di controllo, il sistema ritroverebbe in uscita l'effetto del disturbo.

Verifichiamo ciò via simulazione, sottoponendo nella simulazione precedente il sistema a una raffica di vento costante, cioè a un disturbo v costante pari, per esempio, a 100.

```
% disturbo costante: raffica di vento sull'elica da motore fermo a 1000 giri/min (w)
[NUMv, DENv]=ss2tf(A,bv,c,d);
Gv=tf(NUMv,DENv); % fdt da v a y
v=100;
y_v=v*step(Gv,T);
ytot=y_w+y_v;
figure(1); plot(T,ytot); title('ROTAZIONE [rpm] CON DISTURBO');
% in anello aperto il disturbo "si ritrova" sull'uscita
```



La velocità di rotazione dell'albero motore è ora differente da quella desiderata (risente del disturbo).

```
y=dcgain(G)*u+dcgain(Gv)*v;
```

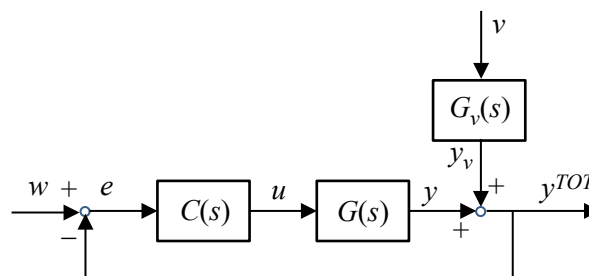
Ovviamente il tempo di risposta (dipendente dalla sola matrice di stato A) non cambia.

CONTROLLO IN ANELLO CHIUSO

Per portare la velocità di rotazione dell'albero motore a un valore desiderato in un tempo pari a circa un secondo, annullando l'effetto di eventuali raffiche di vento presenti in volo, utilizziamo un controllore ad azione proporzionale-integrale (PI)

$$C(s) = \frac{\mu}{s}(s+2)$$

caratterizzante il seguente schema di controllo in anello chiuso



¹ Applicando l'operatore s alle equazioni di stato si ottiene: $G(s) = \frac{60}{2\pi JL} \frac{h}{s^2 + (\frac{R}{L} + \frac{q}{J})s + \frac{Rq+h^2}{LJ}} = \frac{N(s)}{\Delta(s)}$ e

$G_d(s) = -\frac{60}{2\pi JL} \frac{k}{s^2 + (\frac{R}{L} + \frac{q}{J})s + \frac{Rq+h^2}{LJ}} = -\frac{N_d(s)}{\Delta(s)}$, con $N(s) = \frac{60}{2\pi JL} h$, $N_d(s) = -\frac{60}{2\pi JL} k$ e $\Delta(s) = s^2 + (\frac{R}{L} + \frac{q}{J})s + \frac{Rq+h^2}{LJ}$

Le funzioni di trasferimento sono:

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{\mu}{s}(s+2)G(s)$$

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}W(s) + \frac{G_v(s)}{1+L(s)}V(s)$$

$$F_{wy}(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$F_{vy}(s) = \frac{G_v(s)}{1+L(s)}$$

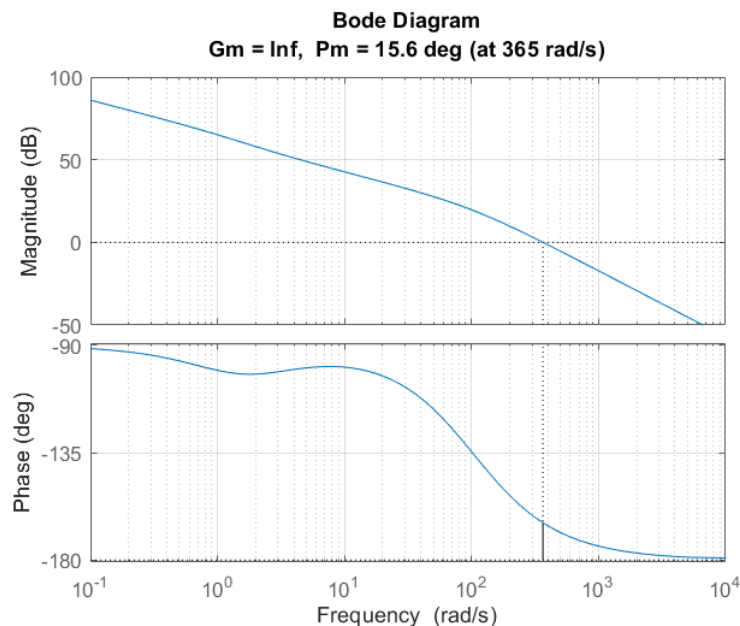
$$E(s) = \frac{1}{1+L(s)}W(s) - \frac{G_v(s)}{1+L(s)}V(s)$$

Così facendo, la funzione di trasferimento di anello $L(s)$ avrà un polo nell'origine e il sistema di controllo (se asintoticamente stabile) annullerà a regime gli effetti di un disturbo sull'uscita, portando l'uscita y al valore desiderato w . Inoltre, la presenza dello zero negativo in $C(s)$, farà aumentare la fase di $L(i\omega)$, favorendo così la asintotica stabilità del sistema di controllo (φ_c "alto" $\rightarrow \varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| > 0 \rightarrow$ asintotica stabilità)

Volendo per il sistema di controllo un tempo di risposta $T_R = \frac{5}{\omega_c} = 0.5s$, la pulsazione critica del sistema di controllo dovrà essere pari a $\omega_c = \frac{5}{T_R} = 10 \text{ rad/s}$.

Valutiamo pulsazione critica e stabilità del sistema di controllo per $\mu = 1$

```
mu=1;
C=mu*tf([1 2],[1 0]);
L=C*G;
figure(2); margin(L); grid;
```



$\omega_c = 365 \text{ rad/s} \rightarrow$ va diminuita!

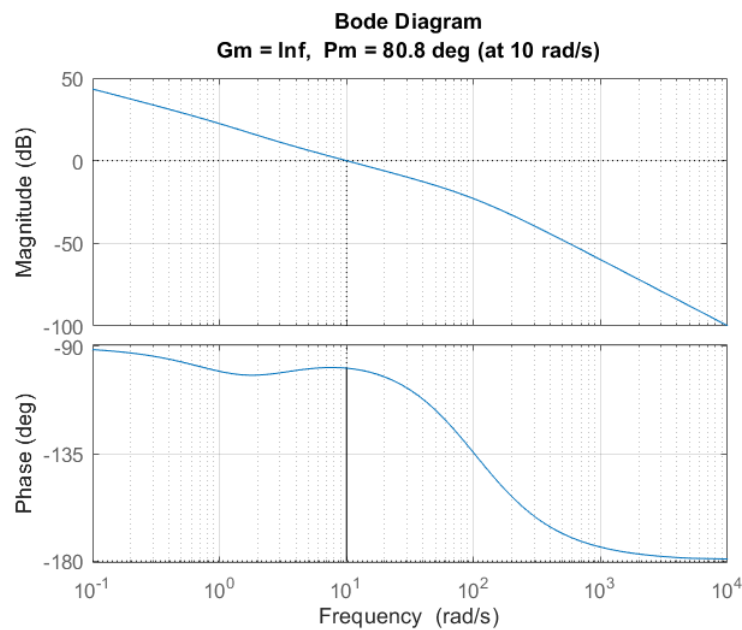
$\varphi_m = 15.6^\circ > 0 \rightarrow$ il sistema di controllo è asintoticamente stabile (per il criterio di Bode)

Dato che $|L(10i)| = 135.6$

```
[mod, fase]=bode(L,10)
```

affinché la pulsazione critica sia pari a 10, occorre dividere μ per tale valore (il diagramma del modulo si abbassa così che la pulsazione critica possa diminuire mentre il diagramma della fase resta inalterato).

```
mu=mu/mod;  
C=mu*tf([1 2],[1 0]);  
L=C*G;  
figure(3); margin(L); grid;
```



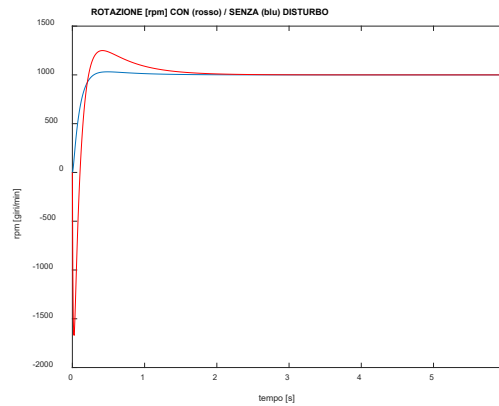
Ora

$\omega_c = 10 \text{ rad/s} \rightarrow$ la specifica sul tempo di risposta è soddisfatta

$\varphi_m = 80.8^\circ > 0 \rightarrow$ il sistema di controllo è asintoticamente stabile

Simuliamo ora il sistema di controllo per portare l'albero motore da fermo a velocità di rotazione a 1000 giri/min, in assenza disturbo (linea blu) e presenza di disturbo (linea rossa).

```
% simulo senza disturbo  
y_w=w*step(L/(1+L),T);  
figure(4);  
plot(T,y_w); hold on;  
% simulo con disturbo  
y_v=v*step(Gv/(1+L),T);  
ytot=y_w+y_v;  
figure(4); plot(T,ytot,'r');  
xlabel('tempo [s]'); ylabel('rpm [giri/min]');  
title('ROTAZIONE [rpm] CON (rosso) / SENZA (blu) DISTURBO');
```



In entrambi i casi (assenza di disturbo in blu e presenza di disturbo in rosso) la velocità di rotazione dell'albero motore tende al valore desiderato ($w = 1000$ giri/min); in particolare, quindi, il sistema di controllo è in grado di azzerare a regime l'effetto della raffica di vento sulla velocità di rotazione.

In assenza di disturbo, il valore di regime viene effettivamente raggiunto in circa 0.5 s.

Tuttavia, in presenza di disturbo, il tempo necessario affinché ciò avvenga resta pari al tempo di risposta del sistema (troppo elevato rispetto alla specifica richiesta).

Ciò è dovuto al fatto che i poli della funzione di trasferimento dal disturbo v all'uscita y

$$F_{vy}(s) = \frac{G_v(s)}{1 + L(s)}$$

sono dati dalle radici di $1 + L(s) = 0$ e dai poli di $G_v(s)$.

L'equazione $1 + L(s) = 0$ ha radice di modulo massimo in $\omega_c = 10$ (è il polo dominante del sistema di controllo) mentre i poli di $G_v(s)$ sono in

`roots(DENV)`

```
-102.6568
-1.3498
```

Pertanto $F_{vy}(s)$ ha polo dominante circa in -1.35 (era il polo dominante del sistema in assenza di controllo) a cui consegue un tempo di risposta circa pari a $-\frac{5}{-1.35} = 3.7$ s.