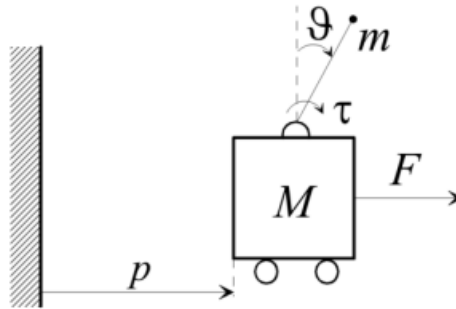


Stabilizzazione di un pendolo inverso – Tracce per le soluzioni



Il modello matematico del sistema meccanico riportato in figura è:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{p} - mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + mL\ddot{\theta} \cos(\theta) = F \\ mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{p} \cos(\theta) - mgL \sin(\theta) = \tau \end{cases}$$

Il sistema è non lineare; linearizzando le equazioni intorno allo stato di equilibrio caratterizzato da posizioni e velocità (lineari ed angolari) nulle e da forzanti (forza e coppia) nulle, esplicitando le derivate seconde si ottiene

$$\begin{cases} \delta\ddot{p} = -\frac{m}{M}g\delta\theta + \frac{1}{M}\delta F - \frac{1}{LM}\delta\tau \\ \delta\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}\delta\theta - \frac{1}{LM}\delta F + \frac{1}{L^2}\frac{M+m}{Mm}\delta\tau \end{cases}$$

Si ponga $M = 10$, $m = 1$, $L = 1$, $g = 9.81$.

1. Posto

$x_1 = \delta p$	$x_2 = \dot{\delta p}$	$x_3 = \delta\theta$	$x_4 = \dot{\delta\theta}$,
	$u_1 = \delta F$	$u_2 = \delta\tau$	
	$y_1 = \delta p$	$y_2 = \delta\theta$	

si scrivano le equazioni di stato e uscita e da queste si ricavano le matrici A , B , C e D del sistema linearizzato.

Il sistema linearizzato può essere riscritto nel seguente modo:

$\dot{x}_1 =$ _____

$\dot{x}_2 =$ _____

$\dot{x}_3 =$ _____

$\dot{x}_4 =$ _____

$y_1 =$ _____

$y_2 =$ _____

Pertanto, le matrici del sistema sono le seguenti:

$$A_{(4,4)} = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} \quad B_{(4,2)} = \begin{vmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{vmatrix}$$

$$C_{(2,4)} = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \end{vmatrix} \quad D_{(2,2)} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

2. Si verifichi che l'equilibrio è instabile.

La matrice A è _____, poiché _____

Pertanto, l'equilibrio nullo è _____

Verifichiamolo con Matlab:

- definiamo i parametri M, m, L e g del sistema
- definiamo la matrice A
- calcoliamone gli autovalori (comando `eig`)

3. Si verifichi che il sistema non è completamente raggiungibile, né completamente osservabile, qualora si utilizzino come ingresso la coppia $\delta\tau (u_2)$ e come uscita la posizione dell'asta $\delta\vartheta (y_2)$.

Per studiare raggiungibilità e osservabilità del sistema occorre valutare il determinante delle

Ingresso \rightarrow coppia applicata all'asta $u_2 \rightarrow b$ è la _____ di B

Uscita \rightarrow posizione angolare dell'asta $y_2 \rightarrow c$ è la _____ di C

- Definiamo B e b
- Calcoliamo la matrice di raggiungibilità (comando `ctrb`)
- Calcoliamo il determinante della matrice di raggiungibilità (comando `det`)

Il determinante è _____, pertanto, considerando come ingresso la coppia $u_2 = \delta\tau$ agente sull'asta, il sistema è _____

- Definiamo C e c
- Calcoliamo la matrice di osservabilità (comando `obsv`)
- Calcoliamo il determinante della matrice di osservabilità (comando `det`)

Il determinante è _____, pertanto, considerando come uscita la posizione angolare dell'asta $y_2 = \delta\vartheta$, il sistema è _____

4. Si verifichi che il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile utilizzando come ingresso la forza $\delta F (u_1)$ e come uscita la posizione $\delta p (y_1)$ del carrello.

Ingresso \rightarrow forza applicata al carrello $u_1 \rightarrow b$ è la _____ di B

Uscita \rightarrow posizione del carrello $y_1 \rightarrow c$ è la _____ di C

- Definiamo B e b
- Calcoliamo la matrice di raggiungibilità (comando `ctrb`)
- Calcoliamo il determinante della matrice di raggiungibilità (comando `det`)

Il determinante è _____, pertanto, considerando come ingresso la forza $u_1 = \delta F$ agente sul carrello, il sistema è _____

- Definiamo C e c
- Calcoliamo la matrice di osservabilità (comando `obsv`)
- Calcoliamo il determinante della matrice di osservabilità (comando `det`)

Il determinante è _____, pertanto, considerando come uscita la posizione del carrello $y_1 = \delta p$, il sistema è _____

5. Con riferimento al punto precedente, si progetti un regolatore tale che

- la legge di controllo k , agendo sulla forza $\delta F (u_1)$, assegni gli autovalori del sistema di controllo come radici del polinomio:

$$\gamma^o(s) = (s^2 + 1.5s + 1)(s^2 + 2s + 1)$$

- il ricostruttore dello stato l , misurando $\delta p (y_1)$, assegni gli autovalori della dinamica dell'errore di ricostruzione come radici del polinomio:

$$\gamma^o(s) = (s^2 + 15s + 100)(s^2 + 20s + 100)$$

NOTA BENE

Per progettare una retroazione dello stato (legge di controllo k) che assegni gli autovalori come chiesti si utilizza il comando `acker()` (digitare `help acker` per una discussione dettagliata sull'uso del comando). In particolare, il comando fa riferimento a una legge di controllo $u = -kx$ e conseguentemente a una matrice dinamica del sistema controllato pari ad $(A - bk)$. Pertanto, nell'uso del comando, il vettore b andrà sostituito con il vettore $-b$.

- Determiniamo le radici del polinomio caratteristico di $A + bk$ (comando `roots`)
- Determiniamo k (comando `acker`)
- Verifichiamo che la matrice $A + bk$ abbia gli autovalori desiderati (comando `eig`)

NOTA BENE

Sempre mediante il comando `acker()`, si può ottenere il ricostruttore dello stato:

$(A - lc)^T$ ha gli stessi autovalori di $(A - lc)$

$(A - lc)^T = A^T - c^T l^T$ dove A^T , c^T e l^T sono in posizione corrispondente ad A , b e k .

Pertanto, basta applicare il comando `acker()` alla coppia $(A^T, -c^T)$ per ottenere l^T .

- Determiniamo le radici del polinomio caratteristico di $A + lc$ (comando `roots`)
- Determiniamo l^T (comando `acker`)
- Trasponiamo l^T per ottenere l
- Verifichiamo che la matrice $A + lc$ abbia gli autovalori desiderati (comando `eig`)

6. Rappresentare l'andamento della posizione dell'asta del sistema linearizzato regolato, partendo

da condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, note con un'incertezza pari a $\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$.

Per rappresentare l'andamento della posizione dell'asta del sistema linearizzato regolato, occorre definirne le matrici. Utilizzando come variabili di stato del sistema regolato la stima dello stato \hat{x} e l'errore di ricostruzione e ($e = \hat{x} - x$), si ottengono le seguenti equazioni (si indichi con v il nuovo ingresso del sistema regolato: $u = k\hat{x} + v$):

$$\dot{\hat{x}} =$$

$$\dot{e} =$$

Volendo visualizzare la posizione dell'asta, si ha:

$$y = x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Si noti che l'errore di ricostruzione andrà a zero, pertanto, affinché anche la stima dello stato converga (come lo stato) a 0, occorrerà imporre al sistema regolato un ingresso v nullo.

Le matrici per il sistema regolato sono date da:

$$A_{REG} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad b_{REG} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$c_{REG} = \begin{bmatrix} & & & \end{bmatrix} \quad d_{REG} =$$

Fissiamo inizialmente le condizioni iniziali del sistema prossime allo stato di equilibrio

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \quad e(0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

e simuliamo il sistema regolato

- Definiamo le matrici A_{REG} , b_{REG} , c_{REG} , d_{REG}
- Definiamo la condizione iniziale per $e(0)$ e $\hat{x}(0)$
- Definiamo l'intervallo di simulazione (max 20)
- Definiamo la funzione di ingresso v (comando `zeros`) di modo che il sistema regolato abbia come equilibrio lo stato nullo
- Simuliamo il sistema regolato (comando `lsim`)
- Visualizziamo il risultato (comando `plot`)

Fissiamo ora invece le condizioni iniziali a valori più distanti dall'equilibrio

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad e(0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

E, ripetendo gli stessi passaggi, simuliamo il sistema.

In entrambi i casi, come previsto dalla teoria, il sistema linearizzato regolato _____

7. Ripetere il punto precedente per il sistema non lineare.

NOTA BENE

Il sistema linearizzato non esiste nella realtà, è solo un'approssimazione matematica del sistema non lineare valida nell'intorno dell'equilibrio considerato.

La bontà della regolazione va dunque valutata in relazione alle performance che otteniamo sul sistema non lineare.

Cerchiamo ora di capire come si comporta il regolatore da noi progettato se utilizzato sul sistema non lineare¹ (file `ese_pendolo_carrello_modello.m`).

Consideriamo dapprima condizioni iniziali vicine all'equilibrio, $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ con piccolo errore sulla stima dello stato $e(0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$

- Definiamo la condizione iniziale per $x(0)$ nella variabile `x0`, per $e(0)$ nella variabile `e0` e per $\hat{x}(0)$ nella variabile `xhat0` ($\hat{x}(0) = x(0) + e(0)$)
- Fissiamo l'orizzonte di simulazione a 20 (`Tfin=20`)
- Utilizziamo il comando `ode45` per simulare il sistema non lineare

```
[tempoNL, xNL] = ode45(ese_carrello_pendolo_modello', [0 Tfin], [xhat0; x0]);
```

- Visualizziamo il risultato mostrando la posizione angolare dell'asta nel tempo
`plot(tempoNL, xNL(:, 7))`

Quindi, con condizioni iniziali vicine all'equilibrio e con piccola incertezza sullo stato, è possibile

Incerezze maggiori porterebbero allo stesso risultato? _____

¹

$\begin{cases} (M+m)\ddot{p} - mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + mL\ddot{\theta} \cos(\theta) = F \\ mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{p} \cos(\theta) - mgL \sin(\theta) = \tau \end{cases} \rightarrow$ Le equazioni di stato del sistema non lineare (per $\tau = 0$ – solo la forza F applicata al carrello agisce sul sistema) sono date da:

$$\ddot{p} = \frac{1}{M+m\sin^2(\theta)} (mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta)\cos(\theta) + F)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{(M+m\sin^2(\theta))L} (-mL\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + (M+m)g\sin(\theta) - F\cos(\theta))$$

Infatti, fissiamo ora le condizioni iniziali a

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad e(0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

Ripetiamo il tutto con `Tfin=1.5`^(*): con condizioni iniziali lontane all'equilibrio _____

(*) per condizioni iniziali lontane dall'equilibrio il sistema non lineare regolato diverge (l'equilibrio è (localmente) asintoticamente stabile; si veda, per esempio, l'andamento nel tempo della velocità angolare dell'asta: `plot(tempoNL, xNL(:,8))`).