

Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica

Simulazione di un modello di competizione batterica – Tracce per le soluzioni

Per risolvere questo esercizio occorre tradurre in uno schema Simulink il sistema non lineare dato ($r_1 = 5$, $r_2 = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $a = 10$)¹

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - a x_1 x_2 = \underline{\hspace{2cm}} = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - a x_1 x_2 = \underline{\hspace{2cm}} = f_2(x_1, x_2)$$

Per definire le due funzioni $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ si possono utilizzare due blocchi Simulink *MATLAB Function* contenuti nella libreria *User Defined Function*. I blocchi restituiscono i valori di \dot{x}_1 e \dot{x}_2 e sono così definiti:

$f_1(x_1, x_2) \rightarrow$ `function y = fcn_x1_dot(x1,x2)`
`y = _____;`

$f_2(x_1, x_2) \rightarrow$ `function y = fcn_x2_dot(x1,x2)`
`y = _____;`

Per ottenere le variabili di stato x_1 e x_2 basterà integrare le uscite \dot{x}_1 e \dot{x}_2 dei due blocchi *MATLAB Function* con due integratori (libreria *Continuous* \rightarrow *Integrator*)

Per rappresentare le traiettorie nello spazio di stato, utilizziamo il blocco *X-Y graph*, all'interno della libreria *Sinks*.

Inoltre, con due blocchi *To Workspace* (libreria *Sinks*) restituiamo a Matlab l'andamento delle variabili di stato x_1 e x_2 : sarà così più "semplice" visualizzare le traiettorie del sistema.

Quindi, lo schema risulta essere:

... in alternativa si può fare riferimento allo schema riportato in
Competizione_Batterica_matfun

Simulando e visualizzando nel blocco grafico il comportamento del sistema (per 10 unità di tempo) si ottengono i seguenti risultati (la condizione iniziale va fissata nei blocchi integratori):

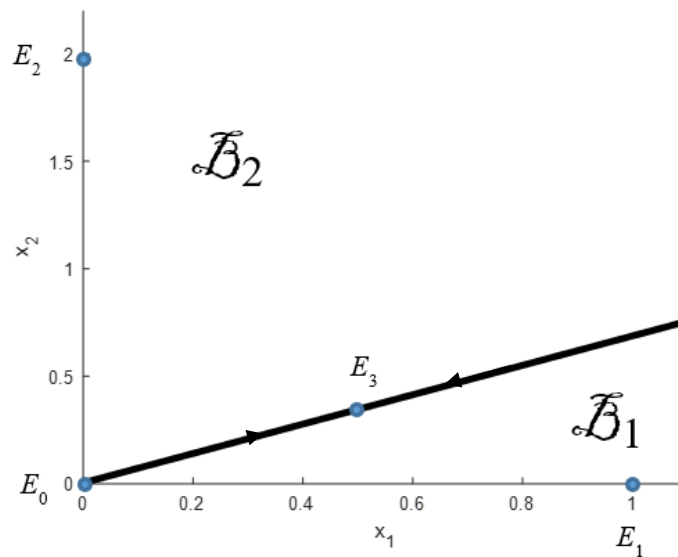
$(x_1(0), x_2(0)) = (1, 0.5) \rightarrow$ il sistema tende verso l'equilibrio _____

$(x_1(0), x_2(0)) = (0.5, 2) \rightarrow$ il sistema tende verso l'equilibrio _____

Il sistema presenta quindi _____ equilibri _____. Per valutarne i bacini di attrazione, si eseguono varie simulazioni per varie condizioni iniziali e il risultato (riportare il quadro delle traiettorie nel diagramma seguente) è²:

¹ Gli equilibri del modello sono: $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (K_1, 0) = (1, 0)$, $E_2 = (0, K_2) = (0, 2)$, $E_3 = (3/7, 2/7)$. Con il metodo della linearizzazione, si dimostra che E_0 ed E_3 sono instabili mentre E_1 ed E_2 sono asintoticamente stabili.

² La frontiera dei bacini di attrazione è una traiettoria rettilinea per il sistema (in neretto). Tale traiettoria è percorsa, allontanandosi da E_0 , convergendo verso E_3 . L'equazione di tale retta ($x_2 = \alpha x_1$) si trova determinando il parametro α per il quale, presa una condizione iniziale $x_2(0) = \alpha x_1(0)$, si ha: $\dot{x}_2(0) = \alpha \dot{x}_1(0)$. Con alcuni passaggi si ottiene $\alpha = 2/3$.

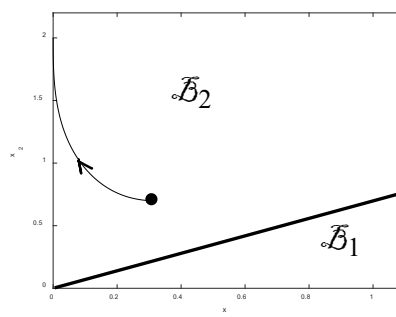


NOTA:

Per ottenere il quadro delle traiettorie del sistema si può ripetere questa procedura:

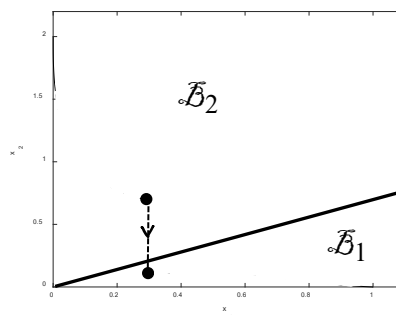
- 1 – cambiare le condizioni iniziali delle variabili di stato nei blocchi integratori,
- 2 – simulare il modello in Simulink (le variabili di stato vengono restituite nel workspace di Matlab),
- 3 – graficare l’andamento della traiettoria in ambiente Matlab (comandi *plot* e *hold on*)

Supponiamo ora che si stia instaurando una situazione che porti a uno stato di malattia (dominanza di batteri nocivi). Possiamo ipotizzare quindi che lo stato iniziale del sistema sia, ad esempio, il punto (0.3, 0.7); essendo questo nel bacino di attrazione \mathcal{B}_2 dell’equilibrio (0, K_2), tenderanno a dominare i batteri nocivi.



Per portare a guarigione l’individuo si possono utilizzare i seguenti metodi:

- Assunzione di soli antibiotici che riducono i batteri nocivi. In tale caso, la condizione iniziale passa, a seguito dell’assunzione, dal bacino \mathcal{B}_2 al _____ così che il sistema si porterà _____.

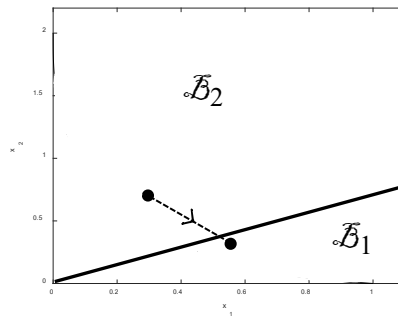


(aggiungi la simulazione)

Tuttavia, per ridurre in tale modo la densità dei batteri nocivi, è necessario fare un forte uso (abuso) di antibiotici che può essere nocivo per l'individuo.

- Assunzione combinata di antibiotici (in moderata quantità) e fermenti lattici (che aumentano la densità di batteri utili).

Il sistema si può comunque trovare in _____ e portare così l'individuo a piena guarigione.



(aggiungi la simulazione)