

Simulazione di un modello di competizione batterica– Soluzioni

Per risolvere questo esercizio occorre tradurre in uno schema Simulink il sistema non lineare dato ($r_1 = 5$, $r_2 = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $a = 10$)¹

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - a x_1 x_2 = 5x_1(1 - x_1) - 10x_1 x_2 = f_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - a x_1 x_2 = 5x_2 \left(1 - \frac{x_2}{2}\right) - 10x_1 x_2 = f_2(x_1, x_2)$$

Per definire le due funzioni $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ si possono utilizzare due blocchi Simulink *MATLAB Function* contenuti nella libreria *User Defined Function*. I blocchi restituiscono i valori di \dot{x}_1 e \dot{x}_2 e sono così definiti:

$f_1(x_1, x_2) \rightarrow$ `function y = fcn_x1_dot(x1,x2)`
`y = 5*x1*(1-x1/1)-10*x1*x2;`

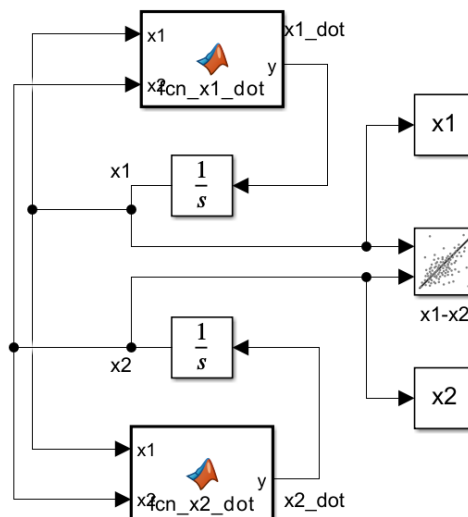
$f_2(x_1, x_2) \rightarrow$ `function y = fcn_x2_dot(x1,x2)`
`y = 5*x2*(1-x2/2)-10*x1*x2;`

Per ottenere le variabili di stato x_1 e x_2 basterà integrare le uscite \dot{x}_1 e \dot{x}_2 dei due blocchi *MATLAB Function* con due integratori (libreria *Continuous* \rightarrow *Integrator*)

Per rappresentare le traiettorie nello spazio di stato, utilizziamo il blocco *X-Y graph*, all'interno della libreria *Sinks*.

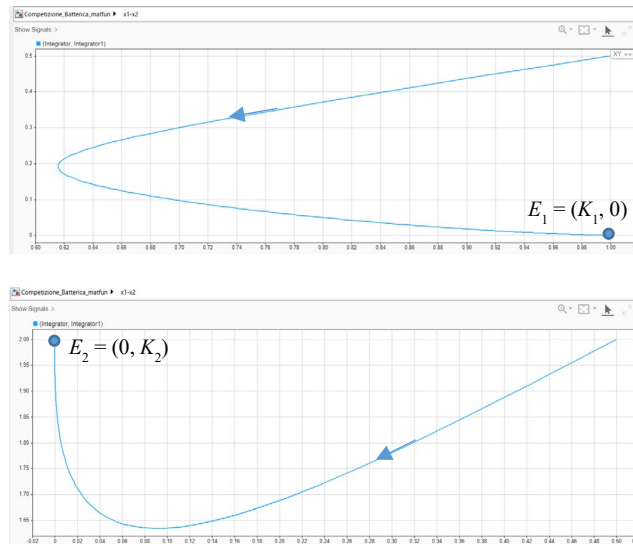
Inoltre, con due blocchi *To Workspace* (libreria *Sinks*) restituiamo a Matlab l'andamento delle variabili di stato x_1 e x_2 : sarà così più "semplice" visualizzare le traiettorie del sistema.

Quindi, lo schema risulta essere (file *Competizione_Batterica_matfun*):

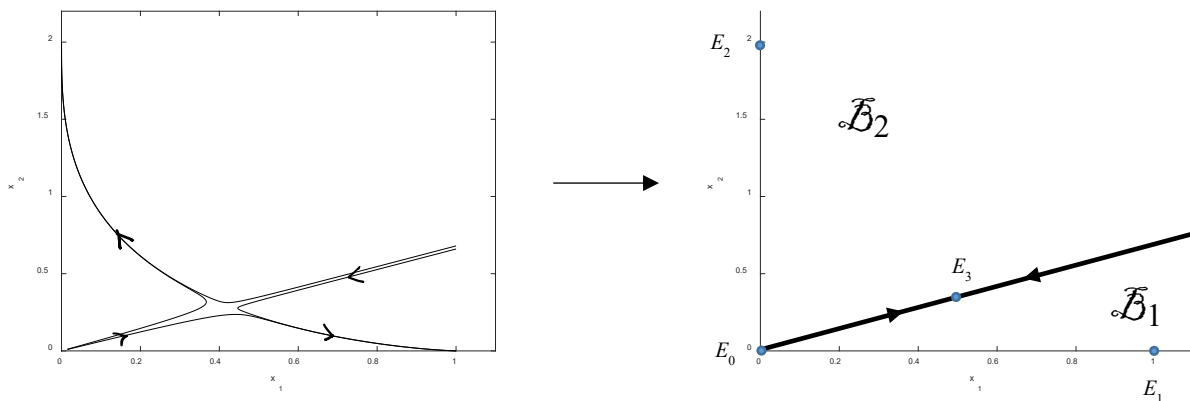


Simulando il comportamento del sistema (per 10 unità di tempo) si ottengono i seguenti risultati (la condizione iniziale fissata nei blocchi integratori è pari a (1, 0.5) e (0.5, 2)):

¹ Gli equilibri del modello sono: $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (K_1, 0) = (1, 0)$, $E_2 = (0, K_2) = (0, 2)$, $E_3 = (3/7, 2/7)$. Con il metodo della linearizzazione, si dimostra che E_0 ed E_3 sono instabili mentre E_1 ed E_2 sono asintoticamente stabili.



Il sistema presenta quindi due comportamenti asintoticamente stabili alternativi: $(K_1, 0)$ e $(0, K_2)$. Per valutarne i bacini di attrazione, si eseguono varie simulazioni per varie condizioni iniziali $((1, 0.68), (1, 0.66), (0.016, 0.01)$ e $(0.014, 0.01))$ e il risultato è mostrato in figura²:



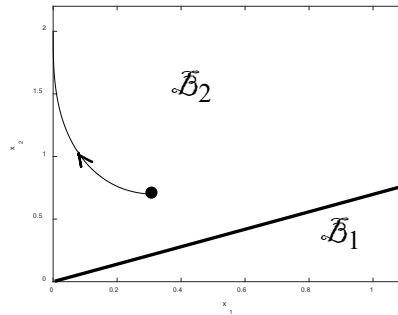
NOTA:

Per ottenere il quadro delle traiettorie del sistema (riportato a sinistra) si può ripetere questa procedura (file *Competizione_Batterica_mat*):

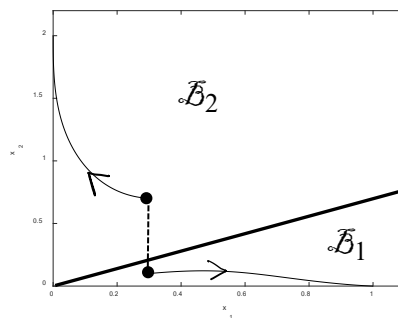
- 1 – cambiare le condizioni iniziali delle variabili di stato nei blocchi integratori,
- 2 – simulare il modello in Simulink (le variabili di stato vengono restituite nel workspace di Matlab),
- 3 – graficare l'andamento della traiettoria in ambiente Matlab attraverso i comandi
`plot(x1,x2,'k-')` % disegno andamento traiettoria simulata in Simulink
`hold on` % per aggiungere altri grafici senza cancellare quelli già esistenti

Supponiamo ora che si stia instaurando una situazione che porti a uno stato di malattia (dominanza di batteri nocivi). Possiamo ipotizzare quindi che lo stato iniziale del sistema sia, ad esempio, il punto $(0.3, 0.7)$; essendo questo nel bacino di attrazione \mathcal{B}_2 dell'equilibrio $(0, K_2)$, tenderanno a dominare i batteri nocivi.

² La frontiera dei bacini di attrazione è una traiettoria rettilinea per il sistema (quella segnata in neretto). Tale traiettoria è percorsa, allontanandosi da E_0 , convergendo verso E_3 . L'equazione di tale retta ($x_2 = \alpha x_1$) si trova determinando il parametro α per il quale, presa una condizione iniziale $x_2(0) = \alpha x_1(0)$, si ha: $\dot{x}_2(0) = \alpha \dot{x}_1(0)$. Con alcuni passaggi si ottiene $\alpha = 2/3$.



Per portare a guarigione l'individuo si possono utilizzare antibiotici che riducono i batteri nocivi. Supponendo quindi che la condizione iniziale passi, a seguito dell'assunzione, al valore $(0.3, 0.1)$ (appartenente al bacino \mathcal{B}_1), il sistema si porterà alla dominanza dei batteri utili $(K_1, 0)$.



Tuttavia, per ridurre in tale modo la densità dei batteri nocivi, è necessario un forte uso (abuso) di antibiotici che può essere nocivo per l'individuo. Pertanto, si può pensare a una cura combinata di antibiotici (in moderata quantità) e fermenti lattici (che aumentano la densità di batteri utili).

Supponendo pertanto una nuova condizione iniziale pari a $(0.45, 0.25)$ in cui la riduzione di densità batterica nociva è inferiore rispetto al caso del solo uso di antibiotici, il sistema si può comunque trovare in \mathcal{B}_1 e portare così l'individuo a piena guarigione.

