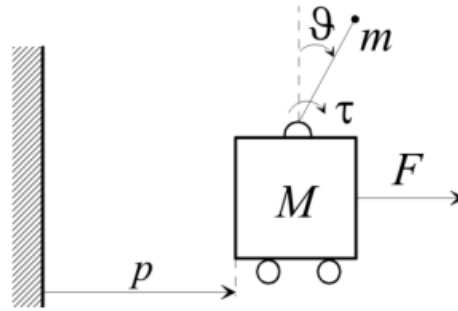


Stabilizzazione di un pendolo inverso – Soluzioni



Il modello matematico del sistema meccanico riportato in figura è:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{p} - mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + mL\ddot{\theta} \cos(\theta) = F \\ mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{p} \cos(\theta) - mgL \sin(\theta) = \tau \end{cases}$$

Il sistema è non lineare; linearizzando le equazioni intorno allo stato di equilibrio caratterizzato da posizioni e velocità (lineari ed angolari) nulle e da forzanti (forza e coppia) nulle, esplicitando le derivate seconde si ottiene

$$\begin{cases} \delta\ddot{p} = -\frac{m}{M}g\delta\theta + \frac{1}{M}\delta F - \frac{1}{LM}\delta\tau \\ \delta\ddot{\theta} = \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}\delta\theta - \frac{1}{LM}\delta F + \frac{1}{L^2}\frac{M+m}{Mm}\delta\tau \end{cases}$$

Si ponga $M = 10$, $m = 1$, $L = 1$, $g = 9.81$.

$$\begin{aligned} \text{1. Posto} \quad & x_1 = \delta p & x_2 = \dot{\delta p} & x_3 = \delta\theta & x_4 = \dot{\delta\theta}, \\ & u_1 = \delta F & u_2 = \delta\tau & & \\ & y_1 = \delta p & y_2 = \delta\theta & & \end{aligned}$$

si scrivano le equazioni di stato e uscita e da queste si ricavano le matrici A , B , C e D del sistema linearizzato.

Il sistema linearizzato può essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{m}{M}gx_3 + \frac{1}{M}u_1 - \frac{1}{LM}u_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{L}\frac{M+m}{M}x_3 - \frac{1}{LM}u_1 + \frac{1}{L^2}\frac{M+m}{Mm}u_2 \end{cases}$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

Pertanto, le matrici del sistema sono le seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{gM+m}{L} & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{LM} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{LM} & \frac{1}{L^2} \frac{M+m}{Mm} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

2. Si verifichi che l'equilibrio è instabile.

La matrice A è triangolare a blocchi; la matrice in basso a destra è instabile (avendo determinante negativo) così come A . Pertanto, l'equilibrio è instabile.

```
clear; close all;
%% dati del problema
M = 10; % Massa del carrello [kg]
m = 1; % massa all'estremo dell'asta [kg]
L = 1; % lunghezza dell'asta [m]
g = 9.81; % accelerazione di gravità [m/s^2]
%% equazioni del sistema in forma matriciale
A = [0 1 0 0;
     0 0 -m/M*g 0;
     0 0 0 1;
     0 0 g/L*(m+M)/M 0];
B = [0 0;
     1/M -1/(L*M);
     0 0;
     -1/(L*M) 1/(L^2)*(M+m)/(m*M)];
C = [1 0 0 0;
     0 0 1 0];
D = [0 0;
     0 0];
%% stabilità del sistema
autovalori = eig(A) % il sistema è instabile

0
0
3.2850
-3.2850
```

3. Si verifichi che il sistema non è completamente raggiungibile, né completamente osservabile, qualora si utilizzino come ingresso la coppia $\delta\tau(u_2)$ e come uscita la posizione dell'asta $\delta\vartheta(y_2)$.

Per studiare raggiungibilità e osservabilità del sistema occorre valutare il determinante delle matrici di raggiungibilità R e di osservabilità O .

Per fare ciò occorre innanzitutto selezionare dalle matrici B e C i vettori b e c corrispondenti a ingresso "coppia" u_2 (seconda colonna di B) e uscita "posizione angolare dell'asta" y_2 (seconda riga di C).

```
b=B(:,2);
c=C(2,:);
R = ctrb(A,b);
det(R)
```

Essendo il determinante della matrice di raggiungibilità nullo, non si ha la completa raggiungibilità del sistema considerando come ingresso la coppia $u_2 = \delta\tau$ agente sull'asta.

```
% il sistema NON è completamente raggiungibile
O = obsv(A,c);
det(O)
```

```
% il sistema NON è completamente osservabile
```

Essendo il determinante della matrice di osservabilità nullo, non si ha la completa osservabilità del sistema considerando come uscita la posizione angolare $y_2 = \delta\vartheta$ dell'asta.

4. Si verifichi che il sistema è completamente raggiungibile e completamente osservabile utilizzando come ingresso la forza δF (u_1) e come uscita la posizione δp (y_1) del carrello.

Ora i vettori b e c corrispondenti a ingresso "forza" u_1 e uscita "posizione del carrello" y_1 corrispondono, rispettivamente, alla prima colonna di B e alla prima riga di C .

```
b=B(:,1);
c=C(1,:);
R = ctrb(A,b);
det(R)
```

Essendo il determinante della matrice di raggiungibilità non nullo, si ha la completa raggiungibilità del sistema considerando come ingresso la forza $u_1 = \delta F$ agente sul carrello.

```
% il sistema è completamente raggiungibile
O = obsv(A,c);
det(O)
```

```
% il sistema è completamente osservabile
```

Essendo il determinante della matrice di osservabilità non nullo, si ha la completa osservabilità del sistema considerando come uscita la posizione $y_1 = \delta P$ del carrello.

5. Con riferimento al punto precedente, si progetti un regolatore tale che

- la legge di controllo k , agendo sulla forza δF (u_1), assegni gli autovalori del sistema di controllo come radici del polinomio:

$$\gamma^o(s) = (s^2 + 1.5s + 1)(s^2 + 2s + 1)$$

- il ricostruttore dello stato l , misurando δp (y_1), assegni gli autovalori della dinamica dell'errore di ricostruzione come radici del polinomio:

$$\gamma^o(s) = (s^2 + 15s + 100)(s^2 + 20s + 100)$$

Per progettare una retroazione dello stato (legge di controllo k) che assegni gli autovalori come chiesti si utilizza la formula di Ackermann e il comando matlab `acker()` (digitare `help acker` per una discussione dettagliata sull'uso del comando). In particolare, il comando fa riferimento a una legge di controllo $u = -kx$ e conseguentemente a una matrice dinamica del sistema controllato pari ad $(A - bk)$. Pertanto, nell'uso del comando, il vettore b andrà sostituito con il vettore $-b$.

```
%% Progetto della legge di controllo
% ricavo le radici del polinomio
autov_controllore = [roots([1 1.5 1]); roots([1 2 1])];
k = acker(A, -b, autov_controllore);
eig(A + b*k)
(sono pari alle radici del polinomio assegnato)
```

In modo analogo, cioè mediante il comando `acker()`, si può ottenere il ricostruttore dello stato.

Il problema della stabilizzazione dell'errore di stima del ricostruttore è infatti il duale del problema della stabilizzazione del sistema affrontato al punto precedente. Osserviamo che $(A - lc)^T$ ha gli stessi autovalori di

$(A - lc)$. Ma $(A - lc)^T = A^T - c^T l^T$ dove A^T , c^T e l^T sono in posizione corrispondente ad A , b e k per l'assegnamento degli autovalori nella legge di controllo. Pertanto basta applicare la formula di Ackermann alla coppia $(A^T, -c^T)$ per ottenere l^T .

```
%% Progetto del ricostruttore dello stato
% ricavo le radici del polinomio
autov_ricostruttore = [roots([1 15 100]); roots([1 20 100])]
lT = acker(A', -c', autov_ricostruttore);
l = lT'
eig(A + l*c)
```

6. Rappresentare l'andamento della posizione dell'asta del sistema linearizzato regolato, partendo

da condizioni iniziali $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, note con un'incertezza pari a $\begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$.

Per rappresentare l'andamento della posizione dell'asta del sistema linearizzato regolato, occorre definirne le matrici. Utilizzando come variabili di stato del sistema regolato la stima dello stato \hat{x} e l'errore di ricostruzione e ($e = \hat{x} - x$), si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (A + bK)\hat{x} + lce + bv \\ \dot{e} &= (A + lc)e\end{aligned}$$

Volendo visualizzare la posizione dell'asta: $y = x_3 = \hat{x}_3 - e_3$

Si noti che l'errore di ricostruzione andrà a zero, pertanto, affinché anche la stima dello stato converga (come lo stato) a 0, occorrerà imporre al sistema regolato un ingresso v nullo.

Le matrici per il sistema regolato sono date da:

$$\begin{aligned}A_{REG} &= \begin{bmatrix} A + bk & lc \\ 0 & A + lc \end{bmatrix} & b_{REG} &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \\ c_{REG} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & d_{REG} &= 0\end{aligned}$$

Fissiamo inizialmente le condizioni iniziali del sistema prossime allo stato di equilibrio

$$e(0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} \quad \hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

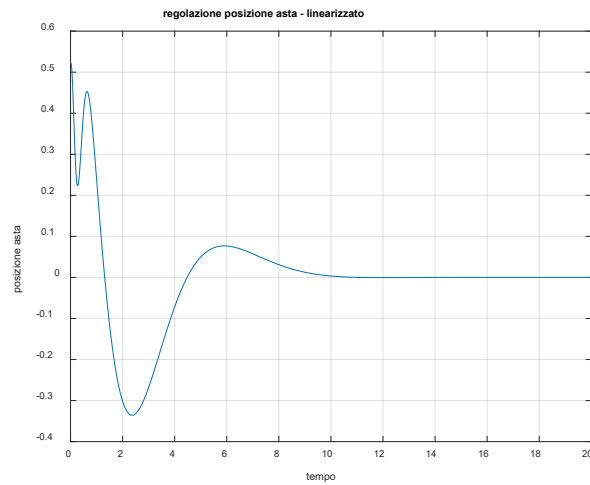
e simuliamo il sistema.

```
AREG=[A+b*k      l*c
      zeros(4,4)  A+l*c];
bREG=[b
      zeros(4,1)];
cREG=[0 0 1 0 0 0 -1 0]; % l'uscita è x3=xhat3-e3: posizione angolare
dell'asta
dREG=0;
sistemaREG=ss(AREG,bREG,cREG,dREG);
x0 = [0 0 pi/6 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
T=[0:0.01:20];
v=zeros(size(T));
[YREG,T,XREG]=lsim(sistemaREG,v,T,[xhat0;e0]);
figure(1); plot(T,YREG); hold on;
```

```

xlabel('tempo'); ylabel('posizione asta'); title('regolazione posizione
asta - linearizzato');
grid;

```



Fissiamo ora invece le condizioni iniziali a valori più distanti dall'equilibrio

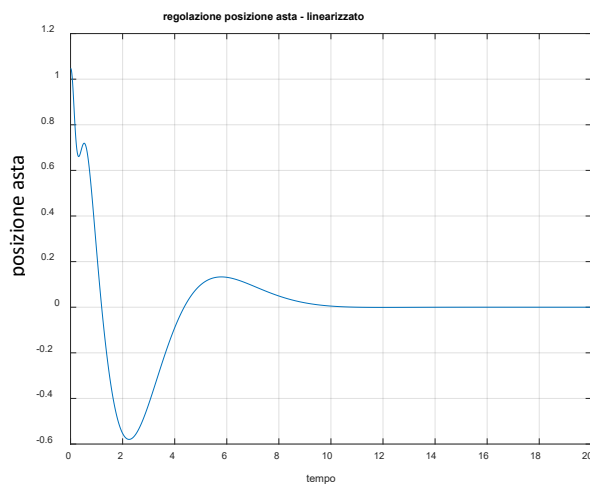
$$\hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$$

e simuliamo il sistema.

```

x0 = [0 0 pi/3 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
[YREG,T,XREG]=lsim(sistemaREG,v,T,[xhat0;e0]);
figure(2); plot(T,YREG); hold on;
xlabel('tempo'); ylabel('posizione'); title('regolazione posizione asta -
linearizzato');
grid;

```



In entrambi i casi il sistema linearizzato regolato riporta l'asta in posizione verticale. Se ciò non accadesse, avremmo commesso qualche errore nell'implementazione del sistema.

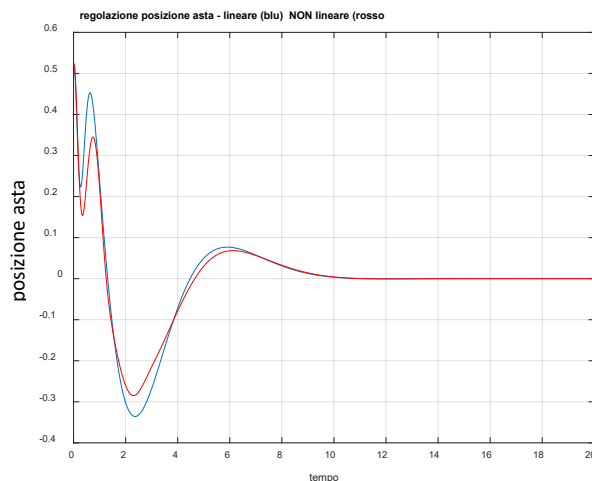
Il sistema linearizzato però non esiste nella realtà, è solo un'approssimazione matematica del sistema non lineare valida nell'intorno dell'equilibrio considerato. La bontà della regolazione va dunque valutata in relazione alle performance che otteniamo sul sistema non lineare.

7. Ripetere il punto precedente per il sistema non lineare.

Cerchiamo ora di capire come si comporta il regolatore da noi progettato se utilizzato sul sistema non lineare¹ (file ese_pendolo_carrello_modello.m).

Per condizioni iniziali vicine all'equilibrio, $\hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{6} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}$, si ha

```
Tfin=20;
x0 = [0 0 pi/6 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
xin=[xhat0;x0];
[temponL,xNL] = ode45('ese_carrello_pendolo_modello',[0 Tfin],xin);
figure(1); plot(temponL,xNL(:,7),'r');
xlabel('tempo'); ylabel('posizione'); title('regolazione posizione asta -
lineare (blu) NON lineare (rosso)');
```



Quindi, partendo da condizioni iniziali vicine all'equilibrio e con piccola incertezza sullo stato, è possibile stabilizzare l'asta in posizione verticale anche nel caso non lineare (incertezze maggiori non porterebbero allo stesso risultato!).

Tuttavia, partendo da condizioni iniziali lontane dall'equilibrio,

¹

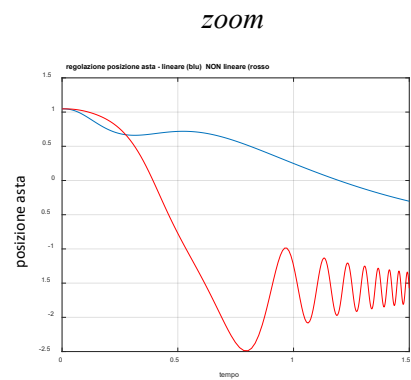
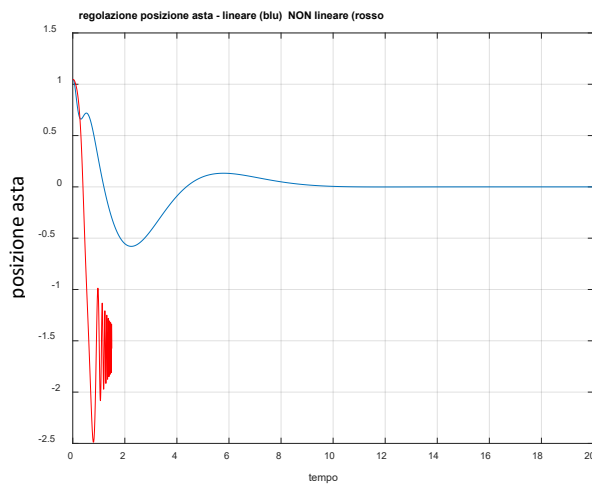
$\begin{cases} (M+m)\ddot{p} - mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + mL\ddot{\theta} \cos(\theta) = F \\ mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{p} \cos(\theta) - mgL \sin(\theta) = \tau \end{cases} \rightarrow$ Le equazioni di stato del sistema non lineare (per $\tau = 0$ – solo la forza F applicata al carrello agisce sul sistema) sono date da:

$$\ddot{p} = \frac{1}{M+m\sin^2(\theta)} (mL\sin(\theta)\dot{\theta}^2 - mg\sin(\theta)\cos(\theta) + F)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{(M+m\sin^2(\theta))L} (-mL\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + (M+m)g\sin(\theta) - F\cos(\theta))$$

$$\hat{x}(0) = x(0) + e(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ -0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix}, \text{ si ha}$$

```
Tfin=1.5;
x0 = [0 0 pi/3 0]';
e0 = [0.01 -0.02 -0.01 0.02]';
xhat0=x0+e0;
xin=[xhat0;x0];
[temponL,xNL] = ode45('problema3_carrello_pendolo_modello',[0 Tfin],xin);
figure(2); plot(temponL,xNL(:,7),'r');
xlabel('tempo'); ylabel('posizione'); title('regolazione posizione asta -
lineare (blu) NON lineare (rosso)');
```



Pertanto, la stabilizzazione del sistema non lineare mediante il regolatore lineare da noi progettato è possibile solo quando la condizione iniziale è vicina all'equilibrio e il grado di incertezza nella stima dello stato è piccola.