Laboratorio 2 per Fondamenti di Automatica (Matematici)

Esercizio 1

Sia dato il modello di competizione interspecifica tra due popolazioni batteriche

$$\dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - a x_1 x_2$$

$$\dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K_2}\right) - a x_1 x_2$$

dove x_1 è la densità di batteri utili e x_2 la densità di batteri nocivi per la buona salute dell'individuo ospite. Nel formulare il modello si è assunto che ciascuna specie batterica, se isolata, cresce in modo logistico (r è il tasso di crescita e K la capacità portante), mentre, la presenza della specie con cui compete apporta una extra-mortalità (a è il coefficiente di competizione interspecifica) proporzionale al prodotto delle densità delle due specie.

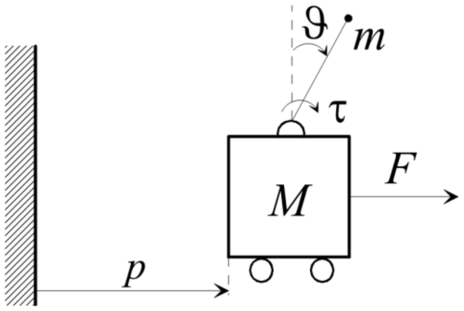
I valori dei parametri sono: $r_1 = 5$, $r_2 = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $a = 10$.

Mediante Simulink verificare che il modello presenta due equilibri stabili alternativi corrispondenti alla dominanza di una sola delle due specie batteriche, valutandone anche i bacini di attrazione.

Supponendo che si instauri una situazione che porti a uno stato di malattia (dominanza di batteri nocivi), cercare una possibile terapia che garantisca la guarigione dell'individuo. La terapia può essere basata sull'uso combinato di antibiotici (che riducono la densità di batteri nocivi, ma che, se assunti in quantità elevate, danneggiano l'individuo) e fermenti lattici (che aumentano la densità di batteri utili).

Esercizio 2

Si consideri il sistema meccanico (carrello con pendolo inverso) riportato in figura:



Il carrello, di massa M, è in moto rettilineo sotto l'azione di una forza F e porta incernierata un'asta di massa trascurabile e lunghezza L, al cui estremo è presente una massa concentrata di valore m. Alla cerniera dell'asta è possibile esercitare una coppia τ. Detta p la posizione del carrello e ϑ la posizione angolare dell'asta, misurata come in figura, il modello matematico del sistema è il seguente:

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{p} - mL\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta) + mL\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta) = F \\ mL^2\ddot{\vartheta} + mL\ddot{p}\cos(\vartheta) - mgL\ \sin(\vartheta) = \tau\end{cases}$$

Si noti che il sistema è non lineare; linearizzando le equazioni intorno allo stato di equilibrio caratterizzato da posizioni e velocità (lineari ed angolari) nulle e da forzanti (forza e coppia) nulle, esplicitando le derivate seconde si ottiene:

$$\begin{cases}\delta\ddot{p} = -\dfrac{m}{M}g\delta\vartheta + \dfrac{1}{M}\delta F - \dfrac{1}{LM}\delta\tau \\ \delta\ddot{\vartheta} = \dfrac{g}{L}\dfrac{M+m}{M}\delta\vartheta - \dfrac{1}{LM}\delta F + \dfrac{1}{L^2}\dfrac{M+m}{Mm}\delta\tau\end{cases}$$

Si ponga $M = 10,\ m = 1,\ L = 1,\ g = 9.81$.

1. Posto $x_1 = \delta p, x_2 = \delta\dot{p}, x_3 = \delta\vartheta, x_4 = \delta\dot{\vartheta}, u_1 = \delta F, u_2 = \delta\tau, y_1 = \delta p, y_2 = \delta\vartheta$, si ricavino le matrici *A*, *B*, *C* e *D* del sistema linearizzato.
2. Si verifichi che l'equilibrio è instabile. Si verifichi inoltre che il sistema è raggiungibile e osservabile utilizzando come ingresso e uscita rispettivamente la forza δF e la posizione δp del carrello, e che invece risulta non raggiungibile, né osservabile, qualora si utilizzino come ingresso e uscita rispettivamente la coppia $\delta\tau$ e la posizione dell'asta $\delta\vartheta$.
3. Si progetti una legge di controllo con retroazione dello stato che, agendo sulla forza δF, assegni gli autovalori del sistema in anello chiuso come radici del polinomio:
$$\gamma^o(s) = (s^2 + 1.5s + 1)(s^2 + 2s + 1).$$
4. Si progetti un ricostruttore dello stato che, misurando δp, assegni gli autovalori della dinamica dell'errore di stima come radici del polinomio:
$$\gamma^o(s) = (s^2 + 15s + 100)(s^2 + 20s + 100).$$
5. Supponendo di poter accedere alla misura dello stato, si costruisca uno schema Simulink del sistema retroazionato con la legge di controllo ricavata al punto 3 (utilizzare come modello Simulink di partenza il file esercizio2sim_vuoto.slx che contiene gli elementi necessari per visualizzare un'animazione e di esportare i dati al workspace di Matlab).

Rappresentare l’andamento delle variabili di stato del sistema linearizzato e di quello non lineare, utilizzando come condizioni iniziali [0; 0; π/6; 0] e [0; 0; π /3; 0].

6. Supponendo ora di non poter accedere allo stato, si costruisca uno schema Simulink del sistema retroazionato utilizzando lo stato stimato grazie al ricostruttore ricavato al punto 4. Valutare l’andamento del sistema linearizzato e di quello non lineare per entrambe le condizioni iniziali riportate al punto 5. Tali condizioni iniziali sono note con un’incertezza pari a [0.01 -0.02 -0.01 0.02].