Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica

Stabilizzazione di un pendolo inverso– Tracce

Il moto verticale del sedile di un'automobile può essere modellizzato, in prima approssimazione, come un sistema massa-molla con attrito, come mostra lo schema in figura 1. La dinamica del sedile rispetto all'automobile è descritta dall'equazione

$$M_S\ddot{x} = -k_S x - a_S\dot{x}$$

dove x rappresenta lo scostamento del sedile dalla sua posizione di riposo.

La massa del sedile più passeggero è M_S = 250 kg, la costante di elasticità della molla è k_S = 5000 N/m, mentre la costante di attrito viscoso vale a_S = 1000 Ns/m.

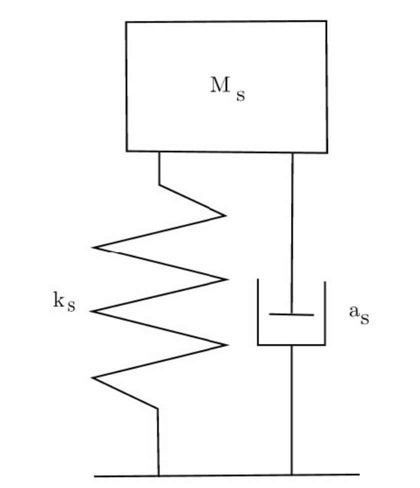

Figura 1

Sia la posizione della massa M_S rispetto al suo punto di equilibrio l'uscita del sistema dinamico.

- Scrivere il sistema dinamico in forma matriciale; studiarne la stabilità, calcolarne l'equilibrio e il tempo di risposta.

Per scrivere il modello $M_S\ddot{x} = -k_S x - a_S\dot{x}$ nella forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

si può porre

$$x_1(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$x_2(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

A questo punto si può scrivere:

$$\dot{x}_1(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\dot{x}_2(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$y(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

da cui:

$$A_{(2,2)} = \left| \quad \quad \quad \quad \right| \; \left| \quad \right| = b_{(2,1)}$$

$$c_{(1,2)} = \left| \quad \quad \quad \quad \right| \; \left| \quad \right| = d_{(1,1)}$$

$tr(A) =$ ________________

$det(A) =$ ________________

Il sistema (t.c., *n* = 2) è pertanto __________________________________

Controlliamo numericamente con Matlab il risultato ottenuto.

Assegniamo i valori dati ai parametri (`M_s, k_s, a_s`) del problema.

Scriviamo la matrice *A*, valutiamone gli autovalori (comando Controlliamo numericamente) e notiamo che entrambi hanno ____________________.

In assenza di salita del passeggero, l'equilibrio del sistema è ovviamente dato da $\bar{x} = \left| \quad \right|$

Il tempo di risposta del sistema si ottiene andando a valutare la parte reale dell'autovalore dominante λ_D della matrice *A* (comandi `real` e `max`), applicando poi la formula $T_R =$_______.

Si ottiene quindi un tempo di risposta circa pari a __________ s.

- Simulare l'andamento dell'uscita del sistema dovuto alla salita nell'automobile di un ulteriore passeggero (peso medio di 80 kg, da ripartire per ruota).

  Per considerare la salita di un passeggero nell'automobile, occorre modificare la seconda equazione di stato introducendo un termine che descrive la forza peso dello stesso, da ripartire sulle quattro ruote ruota (*m* rappresenta la massa del passeggero). Pertanto,

$$\dot{x}_2(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$ [1]

  da cui

$$A_{(2,2)} = \left| \quad \quad \quad \quad \right| \; \left| \quad \right| = b_{(2,1)}$$

$$c_{(1,2)} = \left| \quad \quad \quad \quad \right| \; \left| \quad \right| = d_{(1,1)}$$

[1] Posizione e velocità sono positive se dirette verso l'alto.

Simuliamo quindi la salita del passeggero, partendo dalla condizione iniziale nulla, per un orizzonte temporale pari a due volte il tempo di risposta del sistema.

Definiamo la massa `m`, l'accelerazione di gravità `g`, i vettori *b* e *c* e lo scalare *d*.

Definiamo il sistema in variabili di stato (comando `ss`), l'orizzonte temporale (comando `linspace`) e simuliamo (comando `lsim`[2] con condizione iniziale nulla[3]).

Il nuovo equilibrio è pari a (comando `inv` per la matrice inversa)

$\bar{x} =$ ____________________ = $\begin{vmatrix} \quad \\ \quad \end{vmatrix}$

In particolare, la posizione del passeggero *y* è pari a $\bar{y} =$ _____.

L'equilibrio viene raggiunto dopo un tempo pari al ____________________.

- Si simuli il passaggio dell'automobile sopra una rampa (si modellizzi la rampa utilizzando il file genera_rampa.m) nel caso di passaggio a velocità pari a 50 Km/h, 5 Km/h e 1 Km/h. Si ipotizzi che il vettore velocità rimanga costante in modulo, e che sia parallelo al manto stradale.

Per risolvere questo punto occorre riscrivere l'equazione del sistema.

Nel modello ingresso/uscita precedente, infatti, la variabile *x* descriveva la dinamica della massa (sedile + passeggero) quando l'auto era ferma. Per studiare i casi in cui l'auto si muove verticalmente a causa del manto stradale irregolare occorre riscrivere l'equazione tenendo conto che il moto del sedile sia relativo al moto del manto stradale.

Introducendo la variabile $x_{rel} = x_{sedile} - x_{strada}$, si ha:

$$M_S \ddot{x}_{sedile} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Considerando come ingresso la forma della strada $u = \begin{vmatrix} x_{strada} \\ \dot{x}_{strada} \end{vmatrix}$, il modello ingresso/uscita diventa (vedi AddendumEsercizio1.pdf)

$$M_S \ddot{x}_{sedile} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Ponendo

$$x_1(t) = \underline{\qquad\qquad}$$

$$x_2(t) = \underline{\qquad\qquad}$$

si ottiene un sistema dinamico della forma

[2] Per sistemi a tempo discreto il comando è: `ss(A, b, c, d, 1)`.

[3] Per condizione iniziale non nulla il comando è: `lsim(sys, U, T, X0)` con `X0` vettore di stato iniziale.

$$\dot{x}_1(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\dot{x}_2(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$y(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

da cui:

$$A_{(2,2)} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} = B_{(2,2)}$$

$$c_{(1,2)} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = d_{(1,2)}$$

Aggiorniamo in Matlab i valori delle matrici *B* e *d* e del sistema definito in variabili di stato (comando `ss`).:

Per simulare sistema, occorre costruire correttamente l'ingresso $u = \begin{vmatrix} x_{strada} \\ \dot{x}_{strada} \end{vmatrix}$.

Supponendo che la rampa (di pendenza costante, con altezza *hrampa* e lunghezza *d*) venga affrontata a partire dall'istante t_0 e che il veicolo proceda a velocità costante (*vcar*), la quota della strada sarà pari a

$$x_{strada}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{h_{rampa}}{d_{rampa}} v_{car}(t - t_0) & t_0 < t < t_1 \\ h_{rampa} & t > t_1 \end{cases}$$

dove il tempo di salita è così calcolato:

$$t_1 = t_0 + \frac{d_{rampa}}{v_{car}}$$

La variazione nel tempo della quota della strada ($\dot{x}_{strada}(t)$) sarà quindi data da:

$$\dot{x}_{strada}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{h_{rampa}}{d_{rampa}} v_{car} & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

(si noti come $\ddot{x}_{strada}(t) = 0 \;\; \forall t$).

Impostando la velocità dell'autovettura, generiamo il vettore di ingresso $u = \begin{vmatrix} x_{strada} \\ \dot{x}_{strada} \end{vmatrix}$ utilizzando la funzione `genera_rampa(vel)` (rampa a pendenza costante di lunghezza (orizzontale) *d* pari a 1 m e altezza *hrampa* pari a 10 cm). (NOTA1: la velocità deve essere fornita in m/s. NOTA2: `help genera_rampa` fornisce le indicazioni per l'uso corretto della funzione).

Il comando `lsim` fornisce la simulazione della posizione del passeggero a seguito del passaggio sulla rampa.

Ripetere la simulazione utilizzando le velocità riportate nel testo.

Dai grafici ottenuti si può notare che, diminuendo la velocità,

____

- Come varia il comfort del passeggero al variare della velocità di passaggio sulla rampa?

Supponendo che il comfort del passeggero dipenda dall'accelerazione verticale del sedile, si ha:

$$\ddot{x}_{sedile} = \frac{1}{M_S}(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

Ripetendo le simulazioni con passaggi a velocità di 50 km/h, 5 km/h e 1 km/h, si nota che l'accelerazione subita dal passeggero _______________ al diminuire della velocità, garantendo così un miglior comfort di viaggio.

Infatti, si ha:

velocità [m/s]	acceler. massima [m/s^2]
50	________
5	________
1	________