Laboratorio Matlab – Fondamenti di Automatica

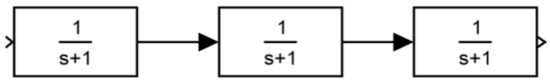
<u>Controllo della portata di uscita di una rete di serbatoi – Soluzioni</u>

Per risolvere questo esercizio occorre tradurre lo schema a blocchi dato nel testo in uno schema Simulink (digitare `simulink` al prompt di Matlab e creare un nuovo modello).

Sapendo che i blocchi 1, 2 e 3 hanno funzione di trasferimento data da:

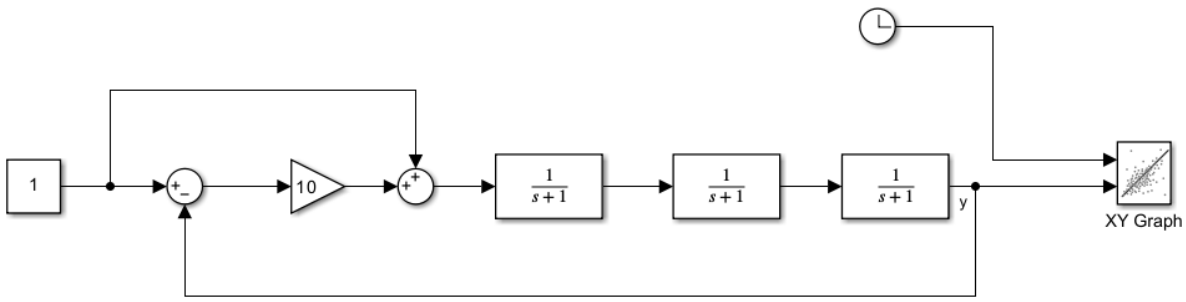
$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

per rappresentare lo schema precedente in Simulink si può utilizzare il blocco Transfer Fcn per tre volte in serie (Library Browser → Simulink → Continuous → Transfer Fcn, trascinare l'oggetto a destra):



Per sommare o sottrarre due segnali esiste il nodo sommatore (Commonly Used Blocks → Gain); per cambiare i segni del nodo sommatore occorre entrare nelle proprietà dello stesso e specificarli nel campo "list of signs".

Infine, per moltiplicare un segnale (guadagno "k") si utilizza un blocco denominato gain (Commonly Used Blocks → Gain; entrare nelle proprietà del blocco e definire il valore pari a k (tale valore verrà poi definito di volta in volta nel workspace di Matlab)). L'ingresso, come richiesto dal testo, sarà una costante con valore 1 (Sources → Constant). Si può pertanto costruire il seguente schema:

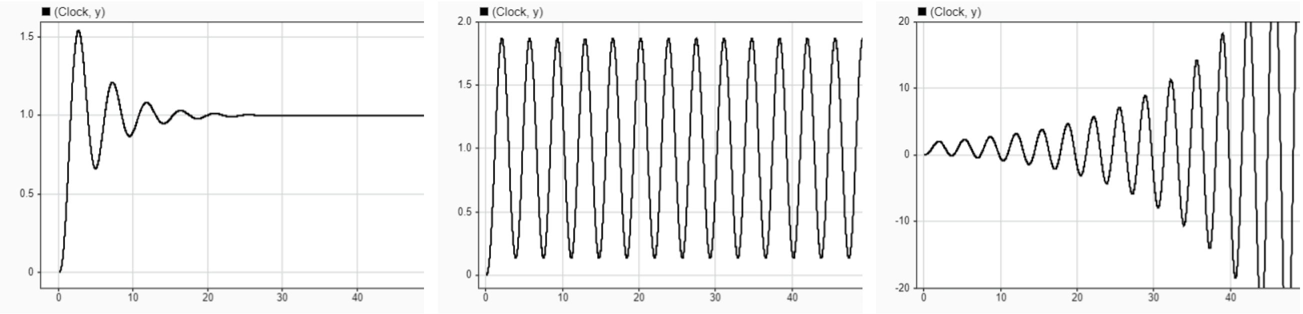


Si noti che è stato inserito il blocco clock (Sources → Clock) per generare il tempo da inserire nel blocco XY (Sinks → XYGraph) in cui verrà visualizzata la portata di uscita dal terzo serbatoio nel tempo.

La richiesta dell'esercizio è di confermare che i calcoli svolti a lezione siano corretti, ovvero che il limite di stabilità del sistema sia raggiunto per $k = 8$. Per fare ciò svolgiamo 3 simulazioni con 3 diversi valori di k ($k < 8$, $k = 8$, $k > 8$).

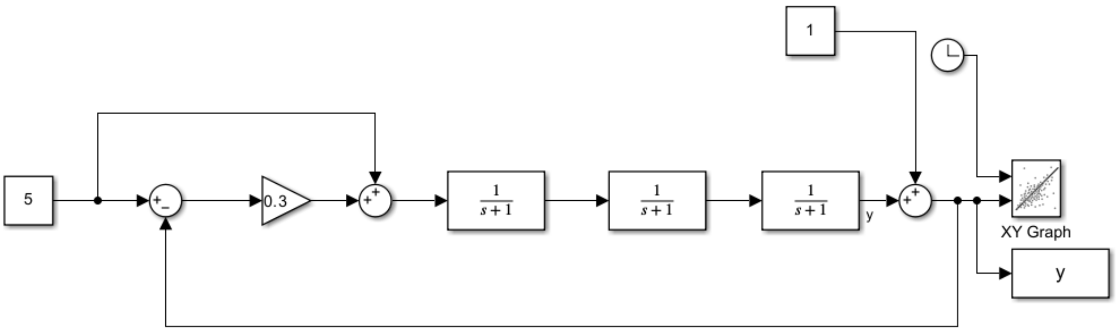
Si ottengono i seguenti risultati (definire `k=4` al prompt di Matlab; simulare il modello con Run e visualizzare il risultato con doppio click su XY Graph; ripetere per `k=8` e `k=10`)

$k = 4$ $\quad$ $k = 8$ $\quad$ $k = 10$



Come si nota il sistema risulta asintoticamente stabile per k = 4, semplicemente stabile per k = 8 e perde di stabilità per k > 8.

Per diagrammare l'andamento dell'uscita all'equilibrio al variare di k (nel caso di asintotica stabilità), fissiamo il parametro di ingresso pari a 5 e aggiungiamo in uscita (tramite un nodo sommatore) il disturbo costante pari a 1.

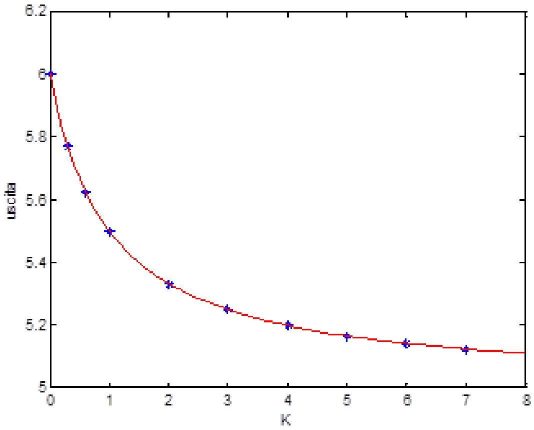


Ripetiamo diverse simulazioni per differenti valori di k riportando il valore dell'uscita di regime corrispondente in una tabella. Il risultato ottenuto è il seguente:

k	0	0.3	0.6	1	2	3	4	5	6	7
uscita	6	5.769	5.625	5.5	5.33	5.25	5.2	5.166	5.143	5.125

NOTA: per visualizzare l'uscita nel workspace di Matlab, collegare il blocco *To Workspace* (libreria *Sinks*) all'uscita *y* selezionando *array* alla voce *Save format*.

I valori ottenuti (asterischi blu) ben approssimano il risultato ottenuto in teoria (linea rossa) $\bar{y} = \bar{u} + \dfrac{\bar{d}}{1+k}$



Pertanto, per ridurre l'effetto del disturbo sull'uscita occorre portare k a valori elevati, avvicinandosi però così al limite di stabilità per il sistema.

Per valutare il tempo di risposta ($T_R = -\frac{5}{\mathbb{R}(\lambda_D)}$, con λ_D = autovalore dominante, cioè l'autovalore con parte reale maggiore) occorre scrivere le equazioni che definiscono il sistema. Queste sono date da:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u = -x_1 + y^0 + k(y^0 - y) = -x_1 + y^0 + k(y^0 - x_3 - d)\\ &= -x_1 - kx_3 + y^0(1+k) - kd\end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1$$

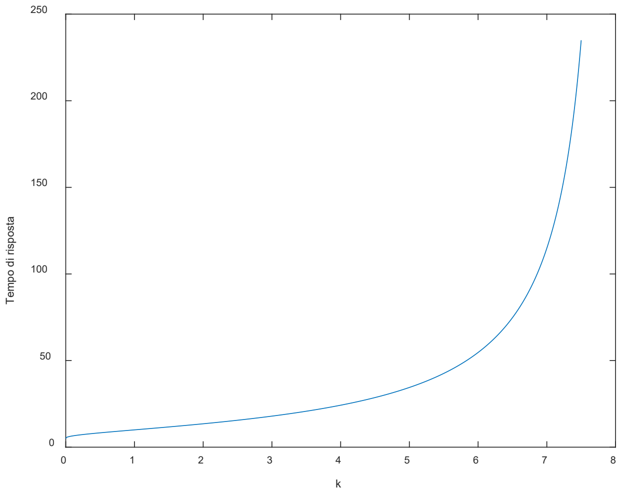
$$\dot{x}_3 = -x_3 + x_2$$

$$y = x_3 + d$$

da cui $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

Valutiamo il tempo di risposta al variare del parametro k

```
par_k=[]; par_TR=[];
for k=0:0.01:7.5
    A=[-1 0 -k;1 -1 0;0 1 -1];
    reale_lD=max(real(eig(A)));
    TR=-5/reale_lD;
    par_k=[par_k;k];
    par_TR=[par_TR;TR];
end;
figure;
plot(par_k,par_TR);
xlabel('k'); ylabel('Tempo di risposta');
```



Pertanto, aumentando k, pur compensando meglio l'effetto del disturbo sull'uscita, il tempo di risposta aumenta (al limite della stabilità, la parte reale dell'autovalore dominante tende a zero e il tempo di risposta tende a infinito).