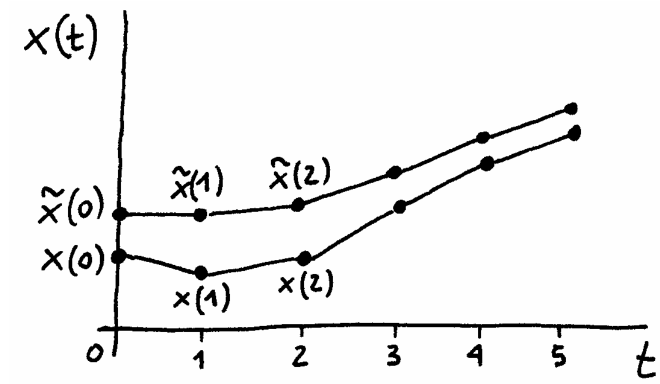
ESPONENTI DI LIAPUNOV

- Sistemi a tempo discreto, mono- e multi-dimensionali
- Problematiche di calcolo
- Sistemi a tempo continuo

MAPPE MONO-DIMENSIONALI

Consideriamo

- il sistema a tempo discreto $x(t+1) = f(x(t))$ di ordine $n=1$
- una sua traiettoria "nominale" $\{x(0), x(1), x(2), \cdots\}$
- una sua traiettoria "perturbata" $\{\tilde{x}(0), \tilde{x}(1), \tilde{x}(2), \cdots\}$ che parte da $\tilde{x}(0) = x(0) + \partial x(0)$ "vicino" a $x(0)$



Poiché

$$\begin{aligned} \tilde{x}(1) - x(1) &= f(\tilde{x}(0)) - f(x(0)) \\ &= f'(x(0))(\tilde{x}(0) - x(0)) + \ldots \end{aligned}$$

ne segue che $|f'(x(0))|$ e' il tasso di espansione/contrazione della differenza iniziale $\partial x(0)$ (se infinitesima) tra le due traiettorie.

Dopo t istanti di tempo

$$\tilde{x}(t)-x(t)=f^{t}(\tilde{x}(0))-f^{t}(x(0))=\left[\frac{\partial f^{t}}{\partial x}\right]_{x(0)}\left(\tilde{x}(0)-x(0)\right)+\ldots$$
$$=\left\{f'\left(x(t-1)\right)f'\left(x(t-2)\right)\cdots f'\left(x(0)\right)\right\}\left(\tilde{x}(0)-x(0)\right)+\ldots$$

Se $\partial x(0)$ è infinitesimo, per $t\to\infty$ il tasso medio di separazione delle traiettorie perturbate vale, sui tempi lunghi

$$h_{x(0)}=\lim_{t\to\infty}\left|f'\left(x(t-1)\right)f'\left(x(t-2)\right)\cdots f'\left(x(0)\right)\right|^{1/t}$$

Risulta allora $|\partial x(t)|\to(h_{x(0)})^{t}\,|\partial x(0)|$, oppure

$$|\partial x(t)|\to e^{L_{x(0)}\,t}\,|\partial x(0)|$$

dove $L_{x(0)}=\ln h_{x(0)}$ è l'esponente di Liapunov della traiettoria che parte da $x(0)$.

Riassumendo, l'esponente di Liapunov vale

$$L_{x(0)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left|f'\left(x(t-1)\right)\right| + \ln\left|f'\left(x(t-2)\right)\right| + \ldots + \ln\left|f'\left(x(0)\right)\right|}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1} \ln\left|f'\left(x(k)\right)\right|$$

Dimensionalmente, la sua unità di misura è l'inverso dell'unità di tempo.

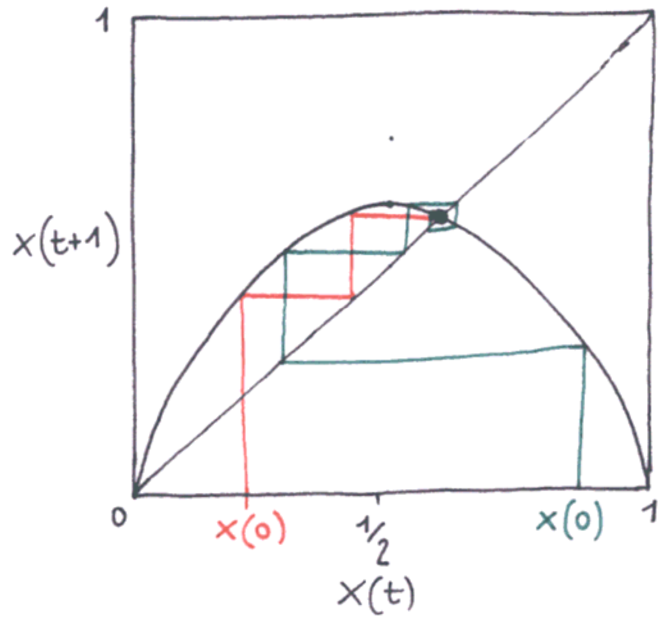
- Se $L_{x(0)} > 0$: lungo la traiettoria γ che parte da $x(0)$, le traiettorie vicine (mediamente) si allontanano da γ.

- Se $L_{x(0)} < 0$: lungo la traiettoria γ che parte da $x(0)$, le traiettorie vicine (mediamente) si avvicinano a γ.

Esempio: mappa logistica, $x(t+1) = r\,x(t)\big(1 - x(t)\big)$

Se $r = 2.5$, l'equilibrio $\bar{x} = (r-1)/r$ è asintoticamente stabile, poiché lo Jacobiano vale

$$f'(x) = r - 2r\bar{x} = 2 - r = -0.5$$



Da qualunque $x(0) \in (0,1)$, la traiettoria tende a $\bar{x}$, per cui

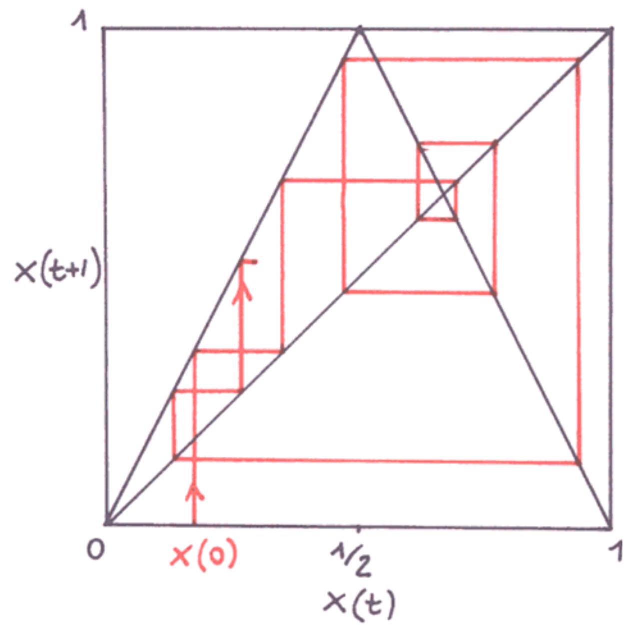
$$L_{x(0)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \ln\left| f'\big(x(k)\big)\right| = \ln\left| f'(\bar{x})\right| = \ln 0.5 < 0$$

Nota bene: quando la traiettoria tende asintoticamente ad un equilibrio $\bar{x}$, $L_{x(0)}$ coincide con il logaritmo del modulo dello Jacobiano.

$\bar{x}$ (iperbolico) asintoticamente stabile $\Rightarrow L_{x(0)} < 0$

Esempio: mappa “a tenda”

$$x(t+1)=\begin{cases} 2x(t) & se\ x(t)\le 1/2 \\ 2(1-x(t)) & se\ x(t)>1/2 \end{cases}$$



Poiché $|f'(x)|=2$, per qualunque $x(0)\in(0,1)$ risulta

$$L_{x(0)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1}\ln|f'(x(k))|=\ln|f'(x)|=\ln 2>0$$

Attenzione:

- non ci sono ne equilibri ne cicli stabili
- $x(t)=1/2 \Rightarrow x(t+1)=1 \Rightarrow x(t+k)=0$ per $k>1$ (grazie alla non reversibilità!)
- $x(t)=(2m+1)/2^{k+1},\ m=0,\ldots,2^k-1 \Rightarrow x(t+k)=1/2$ per $k\ge 1$
- le condizioni iniziali che finiscono in $x=0$ sono dense in $(0,1)$!
- e sono anche le sole rappresentabili in un calcolatore!
- sono anche dense $(0,1)$ le c.i. che appartengono a cicli (di qualsiasi periodo)!
- sono infinitamente di più (non numerabili) le c.i. per cui la traiettoria è non periodica.

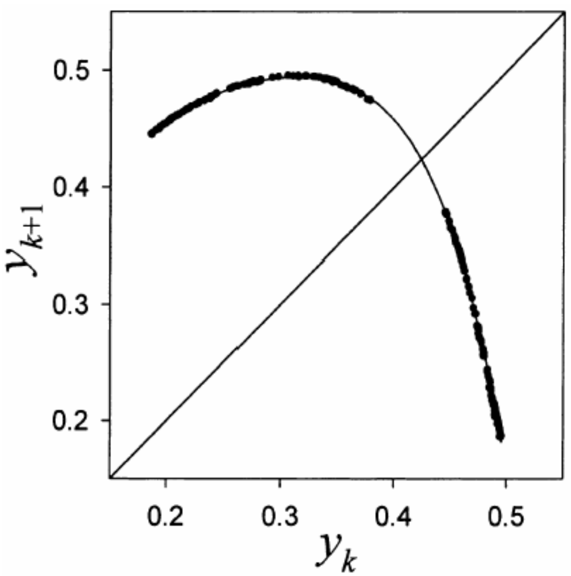
Se la traiettoria è non periodica, l'esponente di Liapunov può solo essere ottenuto numericamente (salvo eccezioni – vedi mappa a tenda).

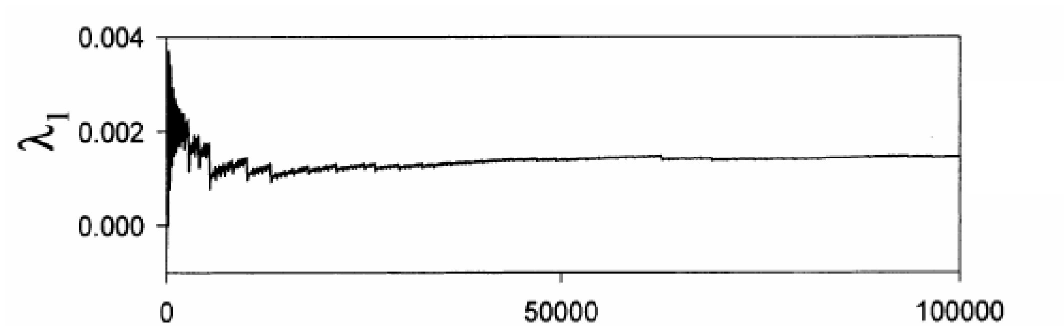
Si calcola la traiettoria $\{x(0), x(1), x(2), \cdots\}$ e, nello stesso tempo, si calcola la stima

$$\hat{L}_{t,x(0)} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{t-1} \ln\left| f'(x(k))\right|$$

finché non si osserva che, al crescere di t, quest'ultima converge.

Esempio:

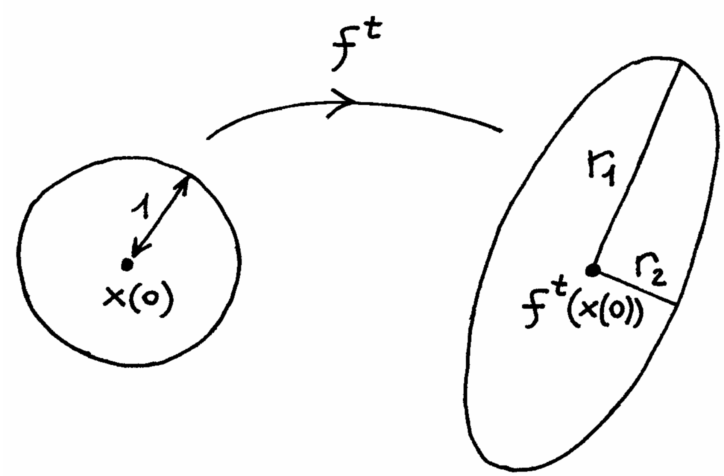




La stima dell'esponente di Liapunov converge, al crescere di t, ad un valore positivo.

MAPPE MULTI-DIMENSIONALI

Consideriamo ora il sistema a tempo discreto $x(t+1)=f(x(t))$ di ordine n qualunque. Prendiamo una sfera (infinitesima) di stati iniziali, centrata in $x(0)$. All'istante t, la sfera si è trasformata in un ellissoide:



sfera: $\partial x(0)^{\mathrm{T}} I \,\partial x(0)=\varepsilon^2$

ellissoide: $\partial x(t)^{\mathrm{T}} E_t \,\partial x(t)=\varepsilon^2, \; E_t=E_t^{\mathrm{T}}>0$

infatti noi sappiamo che

$$\partial x(t)=J(x(t-1))J(x(t-2))\cdots J(x(0))\partial x(0)=H_{t,x(0)}\partial x(0)$$

quindi $E_t=\left(H_{t,x(0)}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} H_{t,x(0)}^{-1}$ soddisfa l'eq. dell'ellissoide.

I semiassi dell'ellissoide sono gli autovettori $v_t^{(i)}$ di E_t,

$$E_t v_t^{(i)}=\lambda_i(t)\, v_t^{(i)}, \quad 0<\lambda_1(t)\le\lambda_2(t)\le\cdots\le\lambda_n(t) \quad (E_t \text{ è genericamente def. pos.})$$

e hanno lunghezze $r_i(t)=\left\|v_t^{(i)}\right\| : \left(v_t^{(i)}\right)^{\mathrm{T}} E_t v_t^{(i)}=\varepsilon^2$, ovvero

$$r_i(t)=\varepsilon\big/\sqrt{\lambda_i(t)}=\varepsilon\sqrt{\lambda_i\left[H_{t,x(0)}^{\mathrm{T}}H_{t,x(0)}\right]}=\varepsilon\,\sigma_i\left[H_{t,x(0)}\right], \qquad r_1(t)\ge r_2(t)\ge\cdots\ge r_n(t)$$

($\lambda_i[\cdot]$ / $\sigma_i[\cdot]$ indica l'i-esimo autovalore / valore singolare della matrice in parentesi).

Sui tempi lunghi ($t \to \infty$), i tassi di crescita medi lungo n direzioni ortogonali sono quindi dati dai "numeri di Liapunov"

$$\left(\frac{r_1(t)}{r_1(0)}\right)^{1/t}, \left(\frac{r_2(t)}{r_2(0)}\right)^{1/t}, \dots, \left(\frac{r_n(t)}{r_n(0)}\right)^{1/t}$$

Gli Esponenti di Liapunov (EL) sono definiti come

$$L_{i,x(0)} = \ln \lim_{t\to\infty} \left(\frac{r_i(t)}{\varepsilon}\right)^{1/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{\lambda_i\left[H^{\mathrm{T}}_{t,x(0)} H_{t,x(0)}\right]} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i\left[H_{t,x(0)}\right], \quad i = 1,2,\dots,n$$

Sono quindi n numeri reali, che risultano ordinati in senso decrescente:

$$L_{1,x(0)} \geq L_{2,x(0)} \geq \cdots \geq L_{n,x(0)}$$

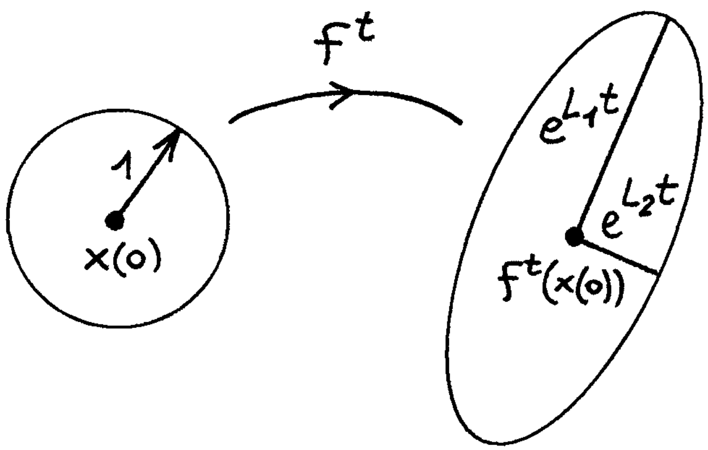
Un'espressione alternativa (ma equivalente in segno) per gli EL, meno interpretabile geometricamente, ma che gode di interessanti proprietà (p.e. rende gli EL invarianti ai cambi di base!):

$$L_{i,x(0)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left|\lambda_i\left[H_{t,x(0)}\right]\right|, \quad i = 1,2,\dots,n$$

Nota bene: $\sigma_i[M] = |\lambda_i[M]|$ se e solo se $M M^{\mathrm{T}} = M^{\mathrm{T}} M$ (matrici dette normali perché diagonalizzabili da una matrice unitaria)

Geometricamente, le quantità $\exp(L_{i,x(0)})$ rappresentano quindi il tasso di crescita medio della distanza $\partial x(0)$ dalla traiettoria nominale (=che parte da $x(0)$) lungo n direzioni ortogonali.

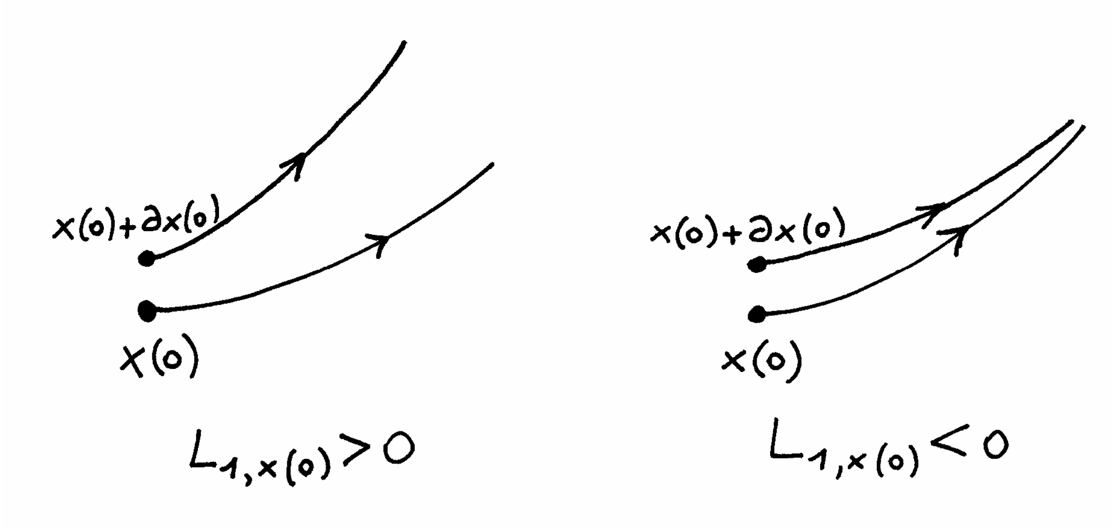
- $\exp(L_{1,x(0)})$ è relativo alla direzione di "massima crescita" (direzione 1)
- $\exp(L_{2,x(0)})$ è relativo alla direzione di "massima crescita", tra quelle ortogonali alla direzione 1 (direzione 2)
- $\exp(L_{3,x(0)})$ è relativo alla direzione di "massima crescita", tra quelle ortogonali alle direzioni 1 e 2 (direzione 3)
- ...e così via fino a n.



Nota bene: qualsiasi sia $\partial x(0)$, è generico attendersi una componente non nulla di $\partial x(t)$ lungo $r_1(t)$ (ciò non capita se $\partial x(0)$ è ortogonale alla direzione che si trasforma in $r_1(t)$), quindi sui tempi lunghi ($t \to \infty$) risulta

$$\|\partial x(t)\| \to e^{L_{1,x(0)}\, t} \|\partial x(0)\|$$

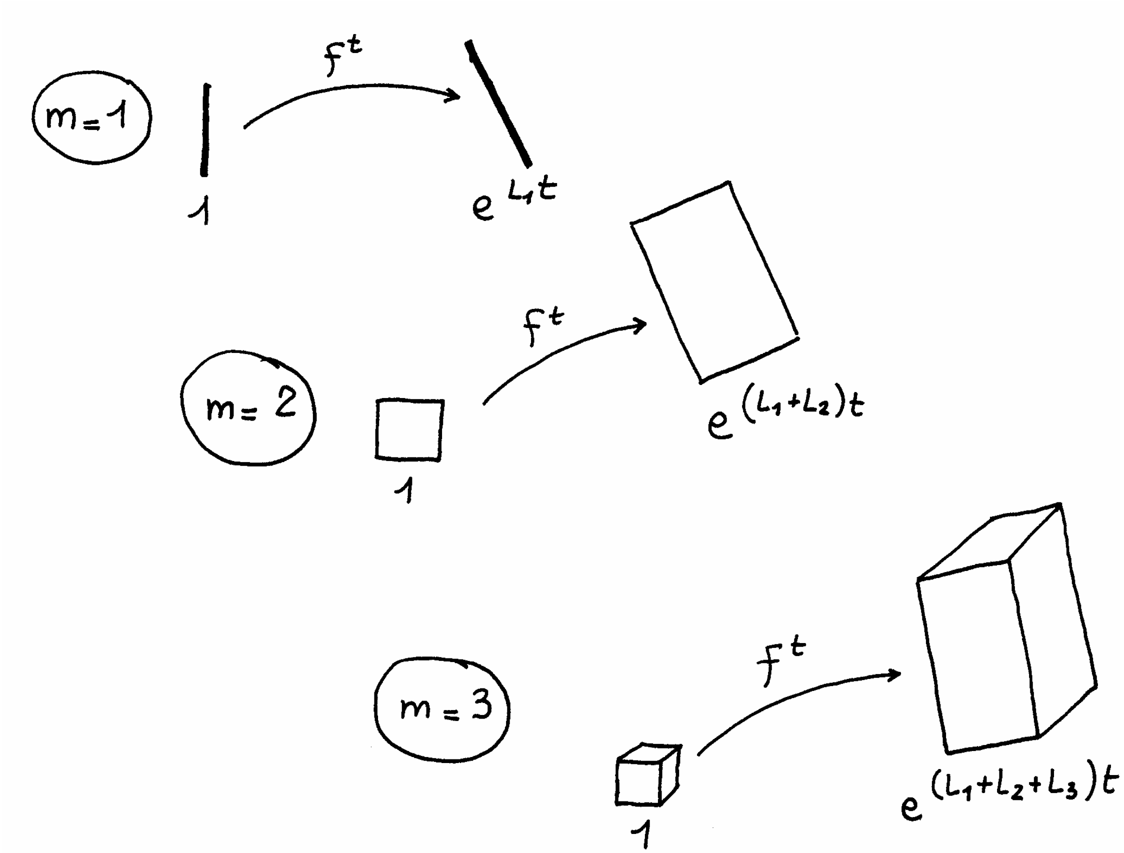
perché tutti gli altri esponenziali risultano trascurabili. Il primo (=massimo) esponente di Liapunov determina se, mediamente, traiettorie (infinitamente) vicine si allontanano ($L_{1,x(0)} > 0$) o si avvicinano ($L_{1,x(0)} < 0$).



Nota bene: in un sistema di ordine n, il tasso di espansione/contrazione dei volumi m-dimensionali ($m \leq n$), mediato lungo la traiettoria, vale

$$\exp(S_{m,x(0)}), \quad \text{dove} \quad S_{m,x(0)} = L_{1,x(0)} + L_{2,x(0)} + \ldots + L_{m,x(0)}$$

è la somma dei primi m EL.



CALCOLO DEGLI ESPONENTI DI LIAPUNOV

Se il sistema è di ordine $n > 1$, calcolare gli EL usando direttamente la definizione

$$L_{i,x(0)} = \ln \lim_{t\to\infty} \left(r_i(t)\right)^{1/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{\lambda_i \left[H^{\mathrm{T}}_{t,x(0)} H_{t,x(0)} \right]} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i \left[H_{t,x(0)} \right], \quad i = 1,2,\ldots,n$$

è numericamente instabile ($H_{t,x(0)} = J(x(t-1))J(x(t-2))\cdots J(x(0))$).

Se vi sono almeno una direzione di espansione ($L_{1,x(0)} > 0$) e una di contrazione ($L_{n,x(0)} < 0$), al crescere di t il maggiore degli $r_i(t)$ viene ad essere molti ordini di grandezza più grande rispetto al minore.

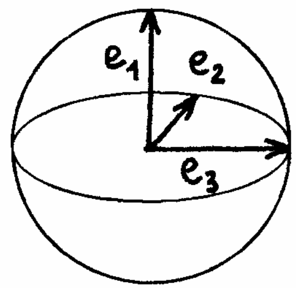
La precisione finita del computer produce allora significativi errori di calcolo.

Sono disponibili vari algoritmi di calcolo numericamente stabili.

Un algoritmo per il calcolo degli EL della traiettoria $\{x(0), x(1), x(2), \cdots\}$.

passo 0) Poni $k = 0$. Definisci la base ortonormale

$$
\begin{aligned}
e_1^{(k)} &= [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\
e_2^{(k)} &= [0 \quad 1 \quad \cdots \quad 0] \\
&\;\;\ldots \\
e_n^{(k)} &= [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]
\end{aligned}
$$

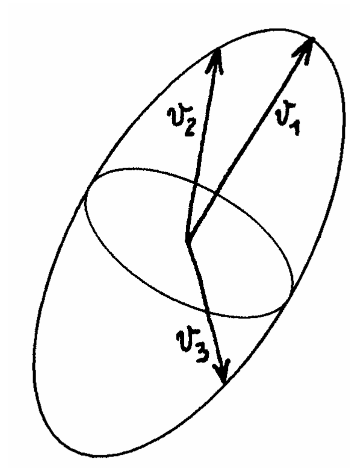


e la condizione iniziale $x^{(k)} = x(0)$.

passo k) Per ciascuna delle n condizioni iniziali $\delta x^{(i)}(0) = e_i^{(k)}$, calcola l'evoluzione della dinamica linearizzata lungo la traiettoria nominale

$$\delta x^{(i)}(t+1) = J(x(t))\delta x^{(i)}(t)$$

(la traiettoria nominale è definita da $x(t+1) = f(x(t))$ con $x(0) = x^{(k)}$) fino a $t = \tau$ prefissato (piccolo!), ottenendo così gli n vettori $v_i^{(k)} = \delta x^{(i)}(\tau)$.

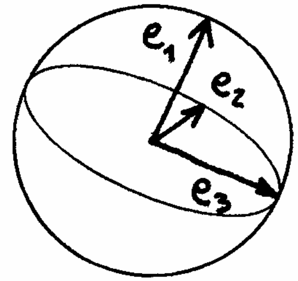


Quindi (procedura di Gram-Schmidt) definisci una nuova base ortonormale $e_i^{(k+1)}$:

$$e_1^{(k+1)} = \frac{v_1^{(k)}}{\| v_1^{(k)} \|}$$

$$e_2^{(k+1)} = \frac{v_2^{(k)} - (v_2^{(k)} \cdot e_1^{(k+1)}) e_1^{(k+1)}}{\| v_2^{(k)} - (v_2^{(k)} \cdot e_1^{(k+1)}) e_1^{(k+1)} \|}$$

$\ldots$



I denominatori sono i tassi di espansione/contrazione lungo le n direzioni ortogonali della nuova base. Indichiamoli con $N_i^{(k)}$ e memorizziamoli.

Poni $x^{(k+1)} = x(\tau)$, $k+1 \to k$ e ritorna al *passo k*.

Dopo r passi, la stima degli EL è data da $L_i = \lim_{r\to\infty} \ln \left(\prod_{k=1}^{r} N_i(k) \right)^{\frac{1}{r\tau}} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r\tau} \sum_{k=1}^{r} \ln N_i(k)$.

SISTEMI A TEMPO CONTINUO

Consideriamo ora

- il sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = f(x(t))$ (di ordine n qualunque)
- lo stato inziale $x(0)$

E' possibile definire una "mappa di periodo T" che, ad ogni stato x, associa lo stato dopo T istanti di tempo, vale a dire

$$x((k+1)T) = F_T(x(kT)), \qquad T > 0 \text{ arbitrario}$$

Si tratta di un sistema a tempo discreto, di cui possiamo calcolare gli EL: $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_n$.

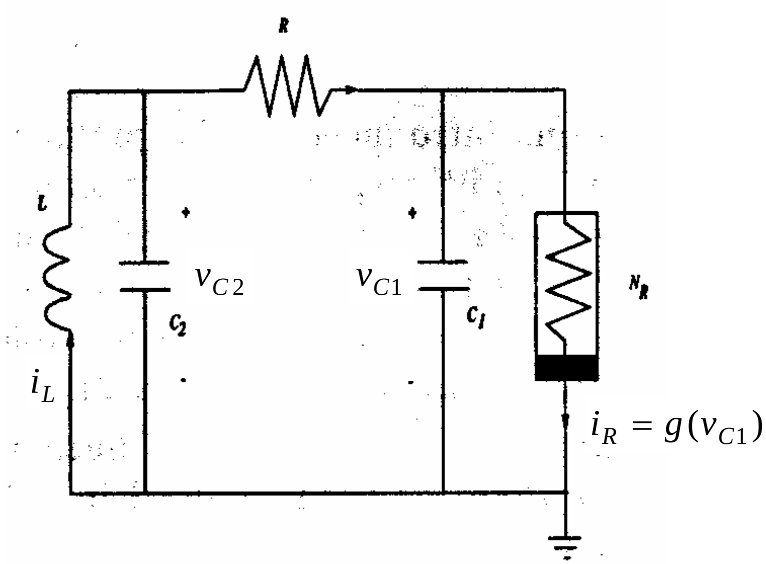
Gli EL di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ saranno dati da: $L_i = \tilde{L}_i / T$, $i = 1,2,\ldots,n$.

$$(\|\partial x(kT)\| \to e^{\tilde{L}_{1,x(0)}\, k} \|\partial x(0)\| = e^{L_{1,x(0)}\, kT} \|\partial x(0)\|)$$

Nota bene: in teoria, può essere scelto qualunque $T > 0$. In pratica, per problemi di stabilità numerica dell'algoritmo di calcolo, è necessario scegliere T piccolo (o adattativo).

Esempio: circuito di Chua

E' una rete elettrica con 3 elementi reattivi (quindi $n=3$) e un elemento non lineare:

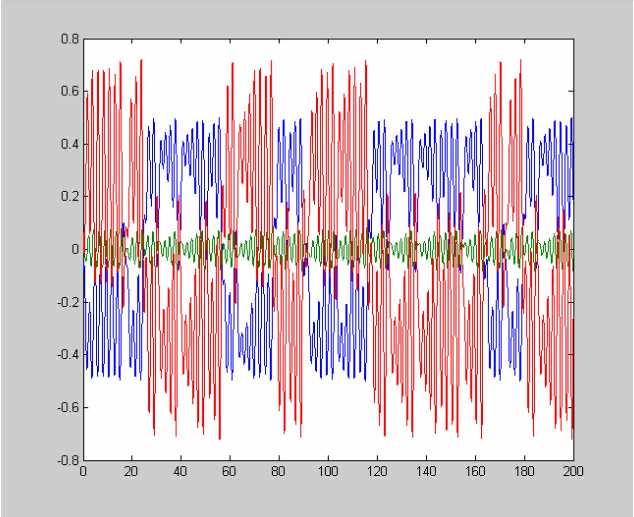


$$
\begin{aligned}
C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{R}(v_{C_2} - v_{C_1}) - g(v_{C_1}) \\
C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R}(v_{C_1} - v_{C_2}) + i_L \\
L \frac{di_L}{dt} &= -v_{C_2},
\end{aligned}
$$

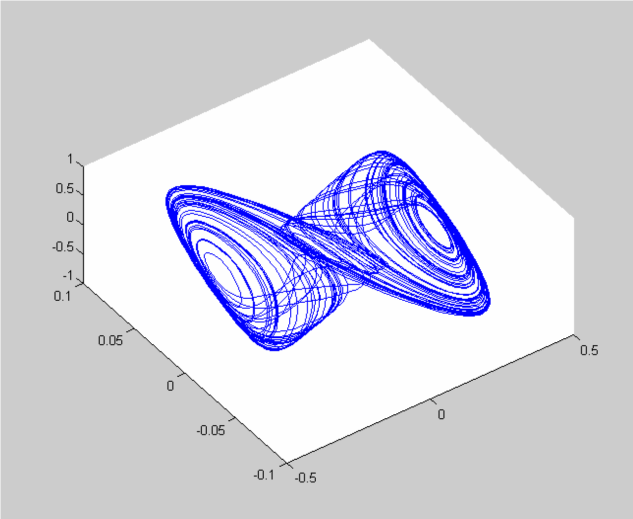
Normalizzando le variabili di stato e i parametri, e scegliendo per l'elemento non lineare una caratteristica tensione-corrente cubica, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \alpha(y - ax^3 - cx) \\
\dot{y} &= x - y + z \\
\dot{z} &= -\beta y
\end{aligned}
$$

Per opportuni valori dei parametri, si ottiene una traiettoria non periodica:



serie temporali di x, y, z



traiettoria nello spazio di stato

Calcolo degli EL: si noti che risulta

$$L_1 > 0, \qquad L_2 \cong 0, \qquad L_3 < 0$$