



POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 4/9/2026

COGNOME: _____ NOME: _____

CODICE PERSONA: _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

10	7	7	6	2
----	---	---	---	---

Voto totale

32

ATTENZIONE!

La prova d'esame è **INSUFFICIENTE** se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

AVVERTENZE

Non è permesso avere a disposizione – anche se non utilizzato – alcun tipo di materiale informativo (libri, appunti, ecc.) né alcun dispositivo (smartphone/watch/glasses, calcolatrici, ecc.), pena l'annullamento della prova.

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati**.

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!

La prova d'esame è **INSUFFICIENTE** se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) La risposta allo scalino unitario di un sistema lineare è $y(t) = \frac{1}{2} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$

La funzione di trasferimento del sistema è pari a:

[1] $G(s) = \frac{1-s}{(1+s)(2+s)}$

[2] $G(s) = \frac{s-1}{(1+s)(2+s)}$

[3] $G(s) = \frac{s}{(1+s)(2+s)}$

[4] $G(s) = \frac{1}{(1-s)(2-s)}$

B) Un sistema lineare a tempo continuo è caratterizzato dalla matrice $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Il movimento libero del sistema

[1] tende a zero per ogni condizione iniziale.

[2] diverge per ogni condizione iniziale.

[3] diverge per almeno una condizione iniziale.

[4] è limitato per ogni condizione iniziale.

C) In un sistema con funzione di trasferimento di anello $L(s)$, in assenza di disturbo, l'uscita $y(t)$ a regime è pari al riferimento $w(t) = \bar{w}$ costante se e solo se $L(s)$

[1] non ha poli complessi coniugati.

[2] ha almeno un polo nullo.

[3] ha almeno uno zero nullo.

[4] non ha né zeri né poli nulli.

D) Un sistema lineare di ordine $n = 3$ ha un sottospazio di raggiungibilità di dimensione 2.

[1] Il sistema non ammette stati raggiungibili.

[2] Gli stati raggiungibili appartengono a una retta passante per l'origine.

[3] Gli stati raggiungibili appartengono a un piano, non necessariamente passante per l'origine.

[4] Gli stati raggiungibili appartengono a un piano passante per l'origine.

E) A un sistema lineare di ordine $n = 2$ instabile ma esternamente stabile, completamente raggiungibile ma non completamente osservabile (dimensione del sottospazio di non osservabilità pari a 1) viene applicato un ingresso costante non nullo.

[1] Per ogni condizione iniziale l'uscita diverge.

[2] Solo per condizione iniziale nulla l'uscita tende a un valore costante.

[3] Per ogni condizione iniziale l'uscita tende a un valore costante.

[4] Solo per condizione iniziale non nulla l'uscita diverge.

A	B	C	D	E
1	3	2	4	3

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente

F) Un sistema di controllo, di cui si è verificata l'asintotica stabilità, è caratterizzato dalla funzione di trasferimento di anello $L(s) = \frac{10}{(1+0.1s)(1+0.01s)}$

Il tempo di risposta del sistema di controllo è circa pari a

- [1] 0.5
- [2] 0.05
- [3] 10
- [4] 100

G) La matrice Jacobiana di un sistema non lineare di ordine $n = 4$, a tempo discreto, valutata in un equilibrio $\bar{x}$, ha autovalori $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +1$, $\lambda_3 = +0.5i$, $\lambda_4 = -0.5i$.

- [1] L'equilibrio $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.
- [2] Il sistema non lineare è instabile.
- [3] L'equilibrio $\bar{x}$ è instabile.
- [4] Non si può affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$.

H) Un sistema lineare a tempo discreto ha autovalori $\sigma(A) = \{-2, -1, -0.5\}$. Il suo movimento libero

- [1] non ha oscillazioni per qualunque condizione iniziale non nulla.
- [2] presenta oscillazioni, per ogni condizione iniziale non nulla.
- [3] presenta oscillazioni, solo per alcune condizioni iniziali non nulle.
- [4] diverge, per ogni condizione iniziale.

I) Il guadagno μ di un sistema (A, b, c, d) , a memoria finita di ordine n , è pari a

- [1] zero.
- [2] zero, per ogni $t \geq n$.
- [3] $c(I - A)^{-1}b + d$.
- [4] $-cA^{-1}b + d$.

L) Un sistema lineare a tempo continuo è definito dal modello ingresso/uscita:

$$y^{(n)}(t) + \alpha_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n y(t) = u(t) \quad \text{dove} \quad y^{(k)}(t) = \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

- [1] Se il sistema è asintoticamente stabile allora $\alpha_i > 0$ per ogni i
- [2] Se il sistema è asintoticamente stabile allora $\alpha_i \geq 0$ per ogni i
- [3] Il sistema è asintoticamente stabile se $\alpha_i \geq 0$ per ogni i
- [4] Il sistema è asintoticamente stabile se $\alpha_i > 0$ per ogni i

F	G	H	I	L
2	4	2	3	1

GIUSTIFICAZIONI (non richieste)

A) poli in -1 e -2 , $y_{\infty} = \frac{1}{2} = G(0) \rightarrow [1]$

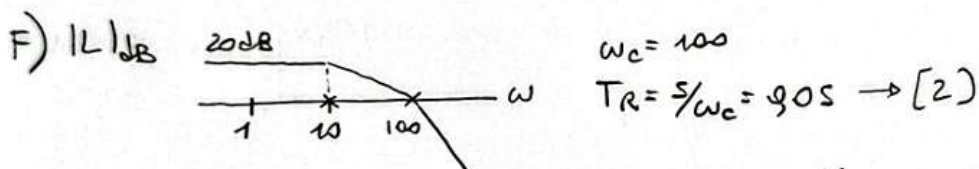
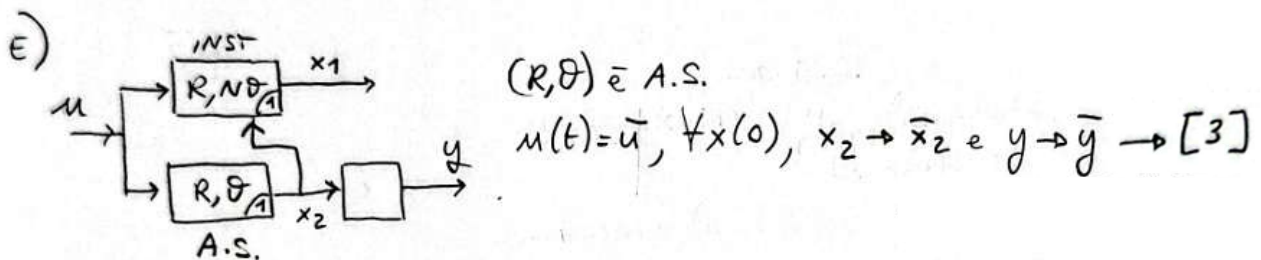
B) $\lambda_A = \lambda_{A_1} \cup \lambda_{A_2}$ $\text{tr}(A_2) = 1 > 0 \Rightarrow A_2$ è inst. così come $A \rightarrow [3]$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

C) $y = \frac{L}{1+L} w$, $y_{\infty} = \frac{L}{1+L} \Big|_{s=0} \bar{w}$ e $y_{\infty} = \bar{w}$ se $\frac{L}{1+L} \Big|_{s=0} = 1$

$$\frac{L}{1+L} \Big|_{s=0} \sim \frac{\frac{M}{s^h}}{1 + \frac{M}{s^h}} \Big|_{s=0} = \frac{M}{M + s^h} \Big|_{s=0} = 1 \text{ se } h > 0 \rightarrow [2]$$

D) $\dim \bar{X}_R = 2 \rightarrow [4]$



G) $J_{\bar{x}}$ è sempl. stab $\rightarrow$ non si può dire nulla sulla stab di $\bar{x} \rightarrow [4]$

H) $\lambda_i < 0 \forall i \rightarrow \forall x(0) \exists$ oscillazioni $\rightarrow [2]$
 ($\hookrightarrow$ tutti i modi del sistema sono oscillanti)

I) Memoria finita $\rightarrow \lambda_i = 0 \forall i \Rightarrow \nexists \lambda_i = 1$ e il quadrato è ben definito a t.d. $\mu = C(I-A)^{-1}b + d \rightarrow [3]$

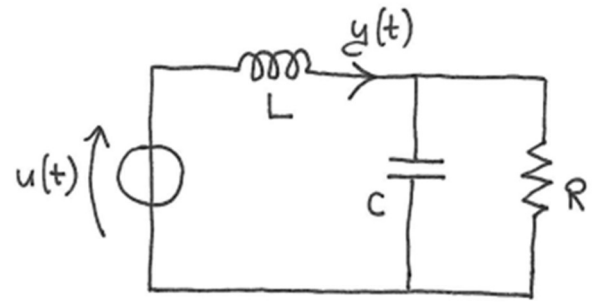
L) Dal modello a regressione uscita in he:

$$\underbrace{(s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n)}_{\Delta(s)} y(t) = u(t)$$

Esiste il teorema A.S. $\Rightarrow \alpha_i > 0 \forall i \rightarrow [1]$
 (t.c.)

Problema 2 (7 punti)

Si consideri la rete elettrica in figura, pilotata da un generatore di tensione $u(t)$.



- Scrivere le corrispondenti equazioni di stato e di uscita e la quaterna (A, b, c, d) .
- Discutere la stabilità del sistema per ogni $R, L, C > 0$.
- Ricavare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

Si ponga ora (e non prima) $R = C = 1, L = 1/100$:

- Tracciare i diagrammi di Bode (modulo e fase) e determinare in modo esatto $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$ a regime quando $u(t) = \sin(10t)$, specificando il valore di Y, ω e φ .
- Determinare in modo qualitativo e rappresentare graficamente la risposta allo scalino unitario.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_1 = \text{corrente in } L, \quad x_2 = \text{tensione su } C$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L} (u - x_2) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} \left(x_1 - \frac{x_2}{R} \right) \end{cases} \quad A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{vmatrix}$$
$$y = x_1 \quad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

b) $\text{tr } A = -\frac{1}{RC} < 0$
 $\det A = \frac{1}{LC} > 0$ $\Rightarrow A$ asintoticamente stabile $\forall R, L, C > 0$

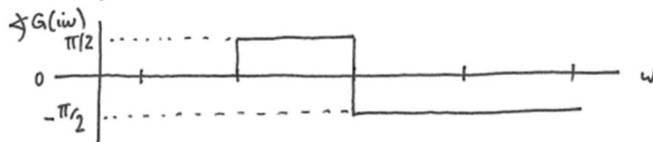
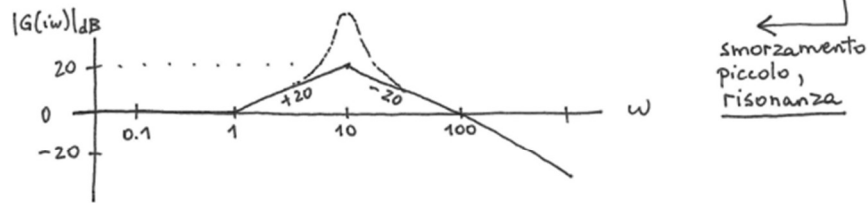
c) $\begin{cases} s x_1 = \frac{1}{L} (u - x_2) \\ s x_2 = \frac{1}{C} \left(x_1 - \frac{x_2}{R} \right) \end{cases} \Rightarrow y = G(s)u \quad G(s) = \frac{RCs + 1}{RLCs^2 + Ls + R}$
 $y = x_1$

$$d) G(s) = \frac{s+1}{\frac{1}{100}s^2 + \frac{1}{100}s + 1} = (\text{Forma standard}) =$$

$$= (1+s) \cdot \frac{100}{s^2 + s + 100} \rightarrow \text{poli complessi:}$$

$$\omega_n = 10$$

$$2\zeta\omega_n = 1 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{20} = 0.05$$



$$u(t) = \sin(10t) \Rightarrow y(t) = Y \sin(10t + \varphi)$$

$$Y = |G(i10)| = |1 + i10| \cdot \frac{100}{|-100 + i10 + 100|} \approx 10 \cdot 10 = 100$$

$$\varphi = \angle G(i10) = \arctan 10 - \frac{\pi}{2} \approx 0$$

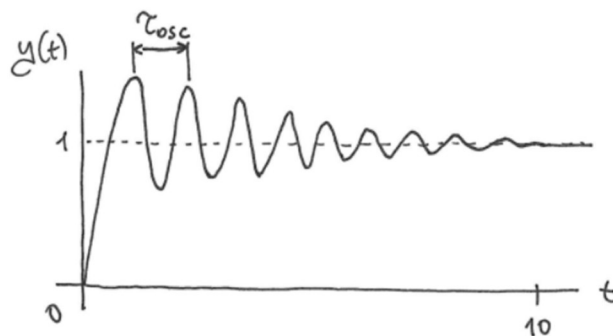
$$e) y(\infty) = G(0) = 1$$

$$\text{poli: } s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-400}}{2} \approx -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{400}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i10$$

$$T_D = 2, T_R \approx 5T_D = 10, \zeta_{osc} = \frac{2\pi}{\text{Im}(p)} = 0.628$$

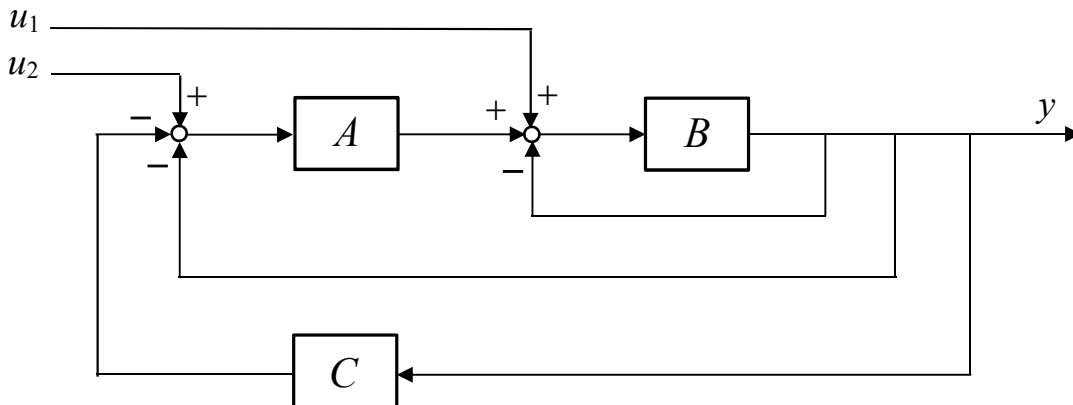
$$\tau = 1: y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 100 > 0$$



Problema 3 (7 punti)

Si consideri il sistema in figura, in cui il blocco A ha funzione di trasferimento $A(s) = \frac{1}{s+5}$, il blocco B è un integratore, il blocco C moltiplica per 2 il suo segnale d'ingresso.



- Determinare le funzioni di trasferimento tra i due ingressi u_1 e u_2 e l'uscita y .
- Discutere la stabilità esterna delle funzioni di trasferimento determinate al punto precedente.
- Determinare (qualitativamente) l'andamento dell'uscita a fronte degli ingressi $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = -sca(t-3)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$\begin{aligned} a) \quad y &= B[u_1 - y + A(u_2 - Cy - y)] \\ y &= Bu_1 - By + ABu_2 - ABCy - AB y \\ y &= \underbrace{\frac{B}{1+B+AB+ABC}}_{G_1} u_1 + \underbrace{\frac{AB}{1+B+AB+ABC}}_{G_2} u_2 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{s+5} \quad B = \frac{1}{s} \quad C = 2$$

$$G_1 = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s} \frac{1}{s+5}} = \frac{s+5}{s^2 + 6s + 8}$$

$$G_2 = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+5}}{1 + \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s} \frac{1}{s+5}} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$$

$$\begin{aligned} b) \quad s^2 + 6s + 8 &= (s+4)(s+2) = 0 & p_1 &= -2 & p_2 &= -4 \\ & & \text{Re}(p_i) < 0 \forall i & \rightarrow & \text{esternamente stabile} \end{aligned}$$

c) $u_1(t) = \text{sca}(t) \rightarrow y_1(t)$

$p_i \in \mathbb{R} \rightarrow \infty \text{ oscill}$

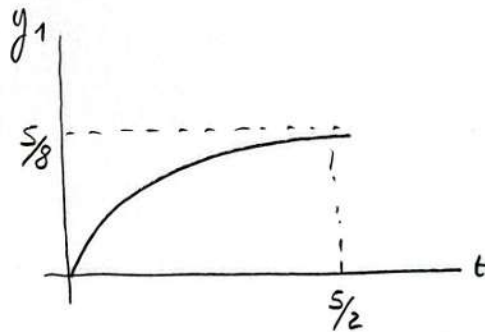
$p_D = -2 \quad T_D = \frac{1}{2} \quad T_R = \frac{5}{2}$

$G_1 \text{ has } r=1 \rightarrow y_1(0)=0$

$\dot{y}_1(0)=1$

$y_1^\infty = G_1(0) = \frac{5}{8}$

$m_s = \sigma = 0$
 $N=0$



$u_2 = \text{sca}(t) \rightarrow y_2(t)$

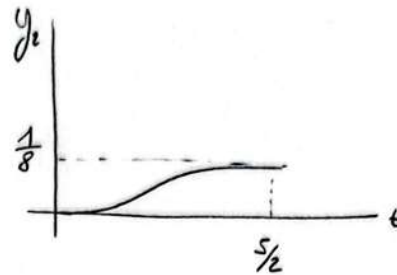
$\vdots$

$G_2 \text{ has } r=2 \rightarrow y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$

$\ddot{y}_2(0)=1$

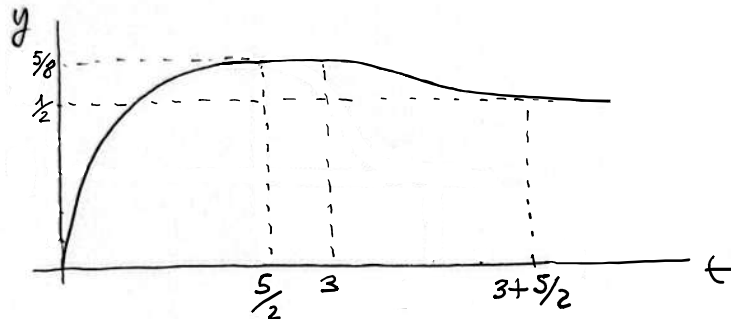
$y_2^\infty = G_2(0) = \frac{1}{8}$

$m_s = \sigma = 0 \quad N=0$



$u_1(t) = \text{sca}(t)$

$u_2(t) = -\text{sca}(t-3) \rightarrow y(t) = y_1(t) - y_2(t-3)$



Problema 4 (6 punti)

a) Per il sistema lineare Σ , definire la nozione di stabilità esterna e specificare la condizione necessaria e sufficiente (sia a tempo continuo che a tempo discreto) affinché il sistema sia stabile esternamente.

b) Si proponga quindi un sistema di ordine $n = 2$, proprio, a tempo continuo, che sia esternamente stabile ma non asintoticamente stabile, e che risulti inoltre completamente osservabile (*specificare la terna (A, b, c) e verificare che le proprietà richieste sussistano*).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

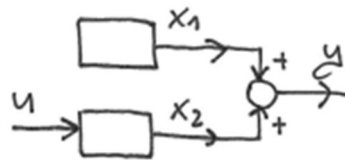
a) Σ è stabile esternamente se, con stato iniziale nullo ($x(0)=0$), qualunque funzione di ingresso $u(t)$ limitata dà luogo a una funzione di uscita $y(t)$ limitata.

Σ stabile esternamente $\Leftrightarrow \operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad \forall p_i$
(t. continuo)

$|p_i| < 1 \quad \forall p_i$
(t. discreto)

$\{p_i\}$ è l'insieme dei poli di Σ

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad d = 0$



$\sigma_A = \{1, -1\} \Rightarrow A$ instabile

$G(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = \frac{1}{s+1}$

$p = -1 : \operatorname{Re}(p) < 0$
 $\Rightarrow$ stabile esternamente

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\det \mathcal{O} \neq 0 \Rightarrow (A, c)$ completamente osservabile

Problema 5 (2 punti)

Scrivere la sequenza di comandi da digitare in Matlab per visualizzare la risposta allo scalino unitario del sistema lineare a tempo continuo con funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{1 - 10s}{(1 + s)(1 + 2s)^2}$$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

```
>> num=10*[-10 1]
>> den=conv([1 1],conv([2 1],[2 1]))
>> G=tf(num,den)
>> step(G)
```