



POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 8/7/2026

COGNOME: _____ NOME: _____

CODICE PERSONA: _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

10	7	7	6	2
----	---	---	---	---

Voto totale

32

ATTENZIONE!

La prova d'esame è **INSUFFICIENTE** se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

AVVERTENZE

Non è permesso avere a disposizione – anche se non utilizzato – alcun tipo di materiale informativo (libri, appunti, ecc.) né alcun dispositivo (smartphone/watch/glasses, calcolatrici, ecc.), pena l'annullamento della prova.

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati**.

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!

La prova d'esame è **INSUFFICIENTE** se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Condizione sufficiente affinché il sistema lineare (A, b, c, d) sia stabilizzabile è che

- [1] sia instabile.
- [2] sia completamente raggiungibile.
- [3] la parte non osservabile sia asintoticamente stabile.
- [4] la parte raggiungibile sia asintoticamente stabile.

B) Il sistema non lineare a tempo discreto $x(t+1) = f(x(t))$ ha un equilibrio il cui jacobiano ha autovalori $\{0.5, 0.5 + i0.5, 0.5 - i0.5\}$. L'equilibrio

- [1] è asintoticamente stabile.
- [2] è stabile ma non asintoticamente stabile.
- [3] è semplicemente stabile.
- [4] è instabile.

C) Il sistema lineare a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ ha autovalori $\{-0.5, 0, 0.5\}$. Il movimento libero

- [1] diverge, per almeno qualche stato iniziale
- [2] rimane costante, qualunque sia lo stato iniziale.
- [3] tende a zero, per almeno qualche stato iniziale.
- [4] tende a zero, per ogni stato iniziale.

D) Si consideri un sistema lineare asintoticamente stabile. Senza altre informazioni, si può affermare che

- [1] il sistema è completamente raggiungibile.
- [2] il sistema è esternamente stabile.
- [3] il sistema è rivelabile.
- [4] il sistema è non completamente osservabile.

E) La risposta allo scalino unitario del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

ha la seguente espressione:

- [1] $e^{-t} - e^{-2t} + 1$
- [2] $e^{-t} - e^{-2t}$
- [3] $-e^t + e^{2t}$
- [4] $e^{-t} - e^{2t} + 1$

A	B	C	D	E
2	1	4	2 3	2

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente

F) In un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$, l'errore a regime dovuto a un disturbo additivo costante sull'uscita vale zero se e solo se

- [1] $L(s)$ ha almeno uno zero nullo.
- [2] $L(s)$ ha almeno un polo nullo.
- [3] $L(s)$ non ha né zeri né poli nulli.
- [4] $L(s)$ ha tutti i poli e zeri nulli.

G) Un sistema lineare a tempo discreto ha matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Il movimento libero del sistema

- [1] diverge per tutte le condizioni iniziali.
- [2] diverge per almeno una condizione iniziale.
- [3] tende a zero da ogni condizione iniziale.
- [4] tende a zero da almeno una condizione iniziale.

H) Dato un sistema lineare proprio (A, b, c) , in generale l'insieme dei poli della funzione di trasferimento $G(s)$ dipende

- [1] solo da A .
- [2] solo da A e b .
- [3] solo da A e c .
- [4] da tutte le tre matrici (A, b, c) .

I) L'insieme di non osservabilità di un sistema proprio (A, b, c) coincide sempre con

- [1] l'origine dello spazio di stato del sistema.
- [2] il sottospazio immagine (span) della matrice di osservabilità O .
- [3] lo spazio nullo (kernel) della matrice di osservabilità O .
- [4] lo spazio nullo (kernel) della matrice di osservabilità trasposta O^T .

L) In un sistema lineare (A, b) asintoticamente stabile ($A \neq 0, b \neq 0$), sottoposto a ingresso costante $u(t) = \bar{u} \neq 0$, il movimento $x(t)$, per $t \rightarrow \infty$:

- [1] tende a 0 da qualunque stato iniziale.
- [2] diverge, per almeno qualche stato iniziale.
- [3] tende a uno stato di equilibrio, da qualunque stato iniziale.
- [4] tende a uno stato di equilibrio, da stato iniziale opportuno (bacino di attrazione).

F	G	H	I	L
2	2	4	3	3

GIUSTIFICAZIONI (non richieste)

A) Σ c.e. $\Rightarrow$ posso fissare a piacere λ_i^* di $A+bk \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i^*) < 0$ a t.c. oppure $|\lambda_i^*| < 1$ a t.d. $\Rightarrow \Sigma$ è stabilizzabile $\rightarrow [2]$

B) $|0,5 \pm i 0,5| = \sqrt{0,5} < 1 \quad |\lambda_i| < 1 \quad \forall i \Rightarrow \bar{x}$ è A.S. $\rightarrow [1]$

C) $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i \Rightarrow A$ è A.S. $\Rightarrow x_L(t) \rightarrow 0 \quad \forall x(0) \rightarrow [4]$

D) (t.c.) A.S. $\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$

$\{p_i\} \subseteq \{\lambda_i\} \Rightarrow \operatorname{Re}(p_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow E.S. \rightarrow [2]$

parte non osservabile A.S. $\Rightarrow$ Rivelabile $[3]$

E) Nella risposta possiamo essere presenti solo i termini e^{-t}, e^{-2t} ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$) $\rightarrow$ escludo $[3]$ e $[4]$
 $y_\infty = G(0) = 0 \rightarrow [2]$

F) $e_\infty = -\frac{1}{1+L} \Big|_{s=0} \bar{d} \quad s=0 \rightarrow L \sim \frac{1}{s^h} \rightarrow \frac{1}{1+L} \sim \frac{s^h}{1+s^h}$
 $\frac{s^h}{1+s^h} \Big|_{s=0} = 0$ se $h > 0 \Rightarrow L$ ha almeno un polo nullo $\rightarrow [2]$

G) $|\operatorname{tr}(A)| = 5 > n = 4 \Rightarrow \operatorname{INST} \Rightarrow \exists x(0)/x_L(t)$ diverge $\rightarrow [2]$

H) $G(s) = c(sI - A)^{-1}b \Rightarrow G$ dipende da A, b, c
 (+eventuali semplificazioni)

den $G = 0 \Rightarrow$ poli $\Rightarrow$ poli dipendono da $A, b, c \rightarrow [4]$

I) $X_{\text{no}} = \ker(\theta) \rightarrow [3]$

(t.d) $y_L(0) = c x(0)$

$y_L(1) = c x(1) = c A x(0)$

$y_L(2) = c x(2) = c A x(1) = c A^2 x(0)$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} y_L(0) \\ y_L(1) \\ y_L(2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \end{pmatrix} x(0) \xrightarrow{\theta}$$

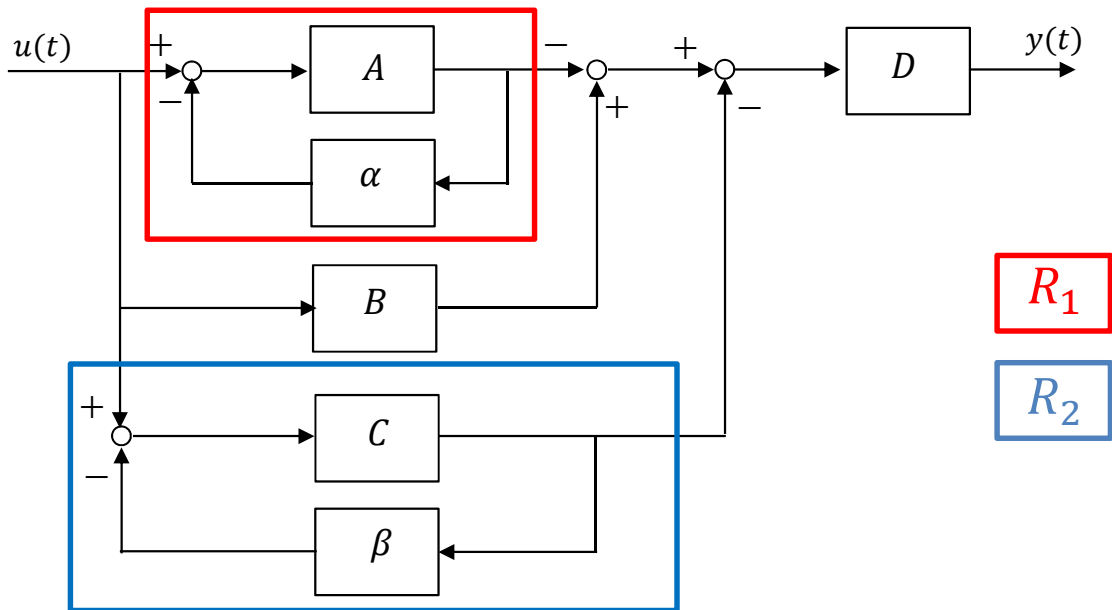
$y_L(k) = 0 \quad \forall k \geq 0 \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} x(0)$ è stato non osservabile e $x(0) \in \ker(\theta)$

L) A è A.S. $\Rightarrow \forall \bar{u} \exists \bar{x}$ verso cui $x(t)$ tende $\forall x(0)$

se fosse $\bar{x} = 0 \rightarrow$ all'equilibrio $0 = 0 + b\bar{u} \rightarrow$ assurdo $\rightarrow [3]$

Problema 2 (7 punti)

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui α e β sono parametri reali.



Il blocco A è descritto dalla funzione di trasferimento $G_A(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2}$, il blocco B è caratterizzato

dalla matrice di stato $A_B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, il blocco C è un integratore, mentre il blocco D è

definito dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_D + 6\dot{y}_D + 8y_D = -\dot{u}_D$.

a) Motivando adeguatamente la risposta, determinare per quali valori di α e β il sistema aggregato è asintoticamente stabile.

Fissare (solo ora) due valori non nulli di α e β che rendano l'aggregato asintoticamente stabile.

b) Valutare tutte le costanti di tempo, il tempo di risposta e l'esistenza di infinite oscillazioni nel movimento libero del sistema.

c) Dire come cambierebbe la stabilità dell'aggregato se il sistema D fosse descritto dal modello $\ddot{y}_D + \ddot{y}_D + 6\dot{y}_D + 8y_D = -\dot{u}_D$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) R_1, B, R_2 e D sono collegati in parallelo/cascata $\Rightarrow$ l'aggregato è A.S. $\Leftrightarrow R_1, B, R_2$ e D sono A.S.

$$\textcircled{R_1} \quad G_{R_1} = \frac{G_A}{1 + \alpha G_A} = \frac{s+2}{s^2 + (2+\alpha)s + (2\alpha+1)}$$

$$\begin{cases} 2+\alpha > 0 \\ 2\alpha+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > -2 \\ \alpha > -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha > -\frac{1}{2}} \quad R_1 \text{ è A.S.}$$

$$\textcircled{B} \quad A_1 \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad A_B = \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \{\lambda\}_{A_1} = \{-2, -1\} \quad A_1 \in \text{A.S.} \\ \text{tr}(A_2) = -1 < 0 \\ \det(A_2) = 1 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow B \in \text{A.S.}$$

$$\text{Inoltre } A_2 \rightarrow \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\{\lambda\}_B = \{-2, -1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$$

$$\textcircled{R_2} \quad G_{R_2} = \frac{G_c}{1 + \beta G_c} = \frac{1}{s + \beta} \quad \left(G_c = \frac{1}{s} \right) \quad \boxed{\beta > 0} \quad R_2 \in \text{A.S.}$$

$$\textcircled{D} \quad \ddot{y}_D + 6\dot{y}_D + 8y_D = -\dot{u}_D \rightarrow \Delta_D(s) = \lambda^2 + 6\lambda + 8 \quad \left. \begin{array}{l} d_1 = 6 > 0 \\ d_2 = 8 > 0 \end{array} \right\} \rightarrow D \in \text{A.S.}$$

$$\text{Inoltre } \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \rightarrow \{\lambda\}_D = \{-2, -4\}$$

$$\text{Pertanto } \Sigma \in \text{A.S.} \iff \begin{cases} d > -\frac{1}{2} \\ \beta > 0 \end{cases}$$

$$b) \quad d = 4 \quad \beta = 1$$

$$G_{R_1} = \frac{s+2}{s^2+6s+9} = \frac{s+2}{(s+3)^2} \quad \{\lambda\}_{R_1} = \{-3, -3\}$$

$$G_{R_2} = \frac{1}{s+1} \quad \{\lambda\}_{R_2} = \{-1\}$$

$$\{\lambda\}_{\Sigma} = \underbrace{\{-3, -3\}}_{R_1} \underbrace{\{-2, -1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}}_B \underbrace{\{-1\}}_{R_2} \underbrace{\{-2, -4\}}_D$$

$$\{T\}_{\Sigma} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\} \quad T_{\text{dom}} = 2 \quad T_{\text{rise}} = 10$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists \infty \text{ oscillazioni}$$

$$c) \quad \ddot{\ddot{y}}_D + \ddot{y}_D + 6\dot{y}_D + 8y_D = -\dot{u}_D$$

$$\Delta_D = \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda + 8$$

$$\text{Hurwitz} (n=3)$$

$$d_1 = 1 > 0$$

$$d_2 = 6 > 0$$

$$d_3 = 8 > 0$$

$$d_1 d_2 = 6 \neq d_3 = 8 \Rightarrow D \text{ non } \in \text{A.S. con come } \Sigma$$

Problema 3 (7 punti)

Due circuiti elettronici (indicati rispettivamente con C1 e C2) sono sottoposti a prove sperimentali per ricavarne la funzione di trasferimento.

- Prova statica: sia per C1 che per C2, partendo da condizione iniziale qualunque e applicando tensione di ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 10 \quad \forall t \geq 0$, si ottiene per $t \rightarrow \infty$ una tensione di uscita costante $\bar{y} = 1$.
- Prova in frequenza (modulo): sia per C1 che per C2, a tensione di ingresso sinusoidale $u(t) = \sin(\omega t)$ corrisponde, per $t \rightarrow \infty$, una tensione di uscita sinusoidale $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$. I valori di Y sono stati misurati alle frequenze $\omega = 0.1; 10; 10^3; 10^5$ e valgono, rispettivamente, $Y = 0.1; 1; 10; 0.1$.
- Prova in frequenza (fase): per $\omega \rightarrow \infty$, lo sfasamento rilevato è $\varphi \rightarrow -\pi$ per C1; $\varphi \rightarrow -2\pi$ per C2.

a) Proporre due funzioni di trasferimento $G_1(s)$ e $G_2(s)$, rispettivamente per C1 e C2, compatibili con tutte le prove sperimentali.

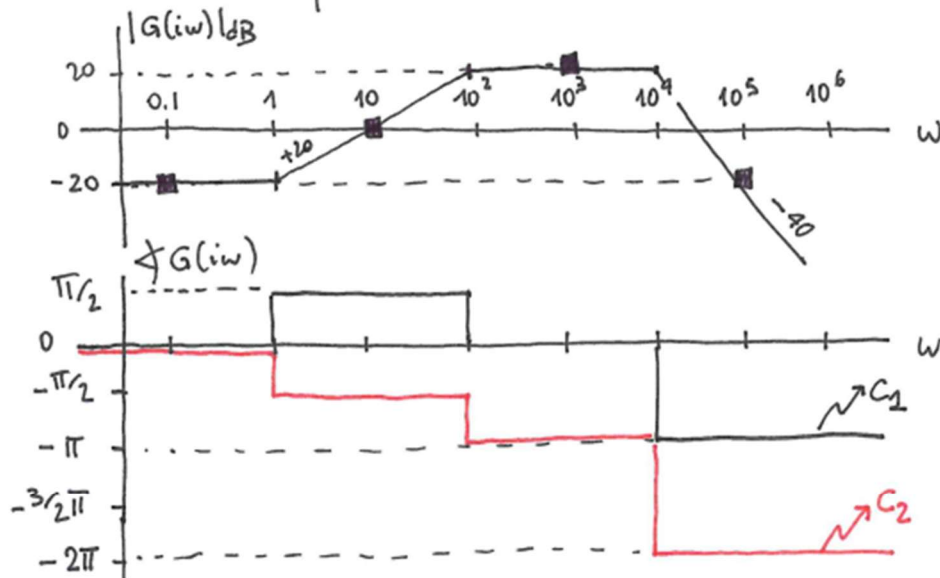
b) Determinare in modo qualitativo, e rappresentare graficamente, la risposta allo scalino unitario e la risposta all'impulso unitario di C1 e di C2.

c) Discutere la asintotica stabilità del sistema ottenuto con retroazione negativa unitaria di $G_2(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono asintoticamente stabili e hanno guadagno
 $G_1(0) = G_2(0) = \frac{1}{10} = 0.1$; $\bar{y}$ costante $\neq 0 \Rightarrow G_1$ e G_2 sono di tipo 0

Prova in Frequenza:



$$G_1(s) = 0.1 \frac{(1+s)}{(1+10^{-2}s)(1+10^{-4}s)^2}$$

$$G_2(s) = 0.1 \frac{(1-s)}{(1+10^{-2}s)(1+10^{-4}s)^2}$$

b) C1: risposta allo scalino

$$y(\infty) = G(0) = 0.1$$

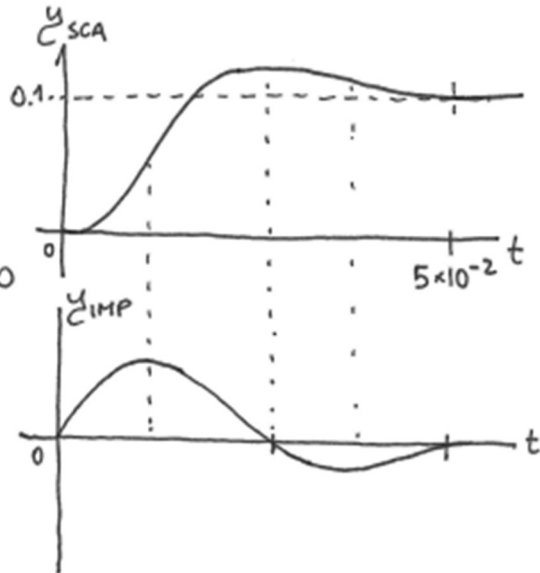
$$T_R \approx 5 T_D = 5 \times 10^{-2}$$

$$r = 2: y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \frac{0.1}{10^{-2} \times 10^{-8}} > 0$$

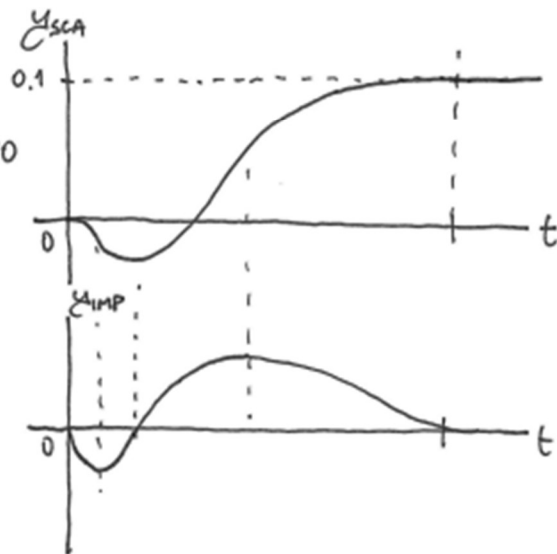
$$m_s = 1: N = 1 \text{ estremo}$$

$$\left(\begin{array}{l} y_{IMP}(t) = \frac{d}{dt} y_{SCA}(t) \\ (r > 0) \end{array} \right)$$



C2: tutto come per C1,
eccetto:

$$\ddot{y}(0) = \frac{-0.1}{10^{-2} \times 10^{-8}} < 0$$



$$\begin{aligned} c) H(s) &= \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)} = \frac{\frac{0.1(1-s)}{(\quad)(\quad)^2}}{1 + \frac{0.1(1-s)}{(\quad)(\quad)^2}} = \\ &= \frac{0.1(1-s)}{(1+10^{-2}s)(1+10^{-4}s)^2 + 0.1(1-s)} \end{aligned}$$

polinomio di grado 3:

$$D(s) = \alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3$$

$$\text{ma } \alpha_0 = 10^{-2} \times 10^{-8} > 0$$

$$\alpha_2 = 10^{-2} + 2 \times 10^{-4} - 0.1 < 0$$

cond. nec. per l'asintot. stabilità è
 $\alpha_i > 0 \forall i$

$\Rightarrow H(s)$ non è asintoticamente stabile

Problema 4 (6 punti)

È dato il sistema non lineare a tempo continuo $\dot{x}(t) = f(x(t))$ di ordine $n \geq 1$ ed è noto un suo equilibrio $\bar{x}$. Illustrare un metodo per analizzare la stabilità dell'equilibrio, specificando quali informazioni possono essere ricavate utilizzando tale metodo.

Si proponga quindi un sistema non lineare a tempo continuo di ordine $n = 1$, dotato di almeno due stati di equilibrio di cui uno asintoticamente stabile e l'altro instabile, dimostrandone la stabilità con il metodo di linearizzazione.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Metodo della linearizzazione

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \xrightarrow{\text{equilibrio}} f(\bar{x}) = 0$$

Sistema linearizzato

$$\dot{z}(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} z(t) \quad \text{dove } z(t) = x(t) - \bar{x}$$

- se $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \in \text{A.S.} \Rightarrow \bar{x}$ è asintoticamente stabile nel sistema non lineare
- se $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \in \text{INST (forte)} \Rightarrow \bar{x}$ è instabile nel sistema non lineare

$$\dot{x} = x(2-x) = -x^2 + 2x = f(x) \quad \left(\text{Graficamente } \begin{array}{c} \dot{x} \\ \uparrow \\ \text{I} \\ 0 \\ \text{A.S.} \\ x \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} = 0 & \quad \bar{x}' = 0 \\ & \quad \bar{x}'' = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}'} = 2 = \lambda > 0 \Rightarrow \bar{x}' \text{ è instabile}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}''} = -2 = \lambda < 0 \Rightarrow \bar{x}'' \text{ è asintoticamente stabile}$$

Problema 5 (2 punti)

Sia dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [0 \quad -1 \quad 1] \quad d = 0$$

Scrivere i comandi Matlab necessari a studiarne la completa raggiungibilità.

Scrivere quindi i comandi necessari per determinare una legge di controllo k che annulli tutti i transitori del sistema controllato in tempo finito.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

A=[-1 0 2; -1 1 3; 0 -1 0]

b=[-1; 2; 1]

R=ctrb(A,b) → matrice di raggiungibilità

det(R) → se diverso da 0 si ha la completa raggiungibilità

autovalori=[0 0 0] → sistema controllato a memoria finita

k=acker(A,-b,autovalori) → legge di controllo