



POLITECNICO MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 19/6/2026

COGNOME: _____ NOME: _____

CODICE PERSONA: _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

10	7	7	6	2
----	---	---	---	---

Voto totale

32

ATTENZIONE!

La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

AVVERTENZE

- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati**.

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!

La prova d'esame è **INSUFFICIENTE** se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Il movimento libero di un sistema lineare a tempo discreto di ordine $n > 1$ non può avere oscillazioni qualora la sua matrice di stato A abbia

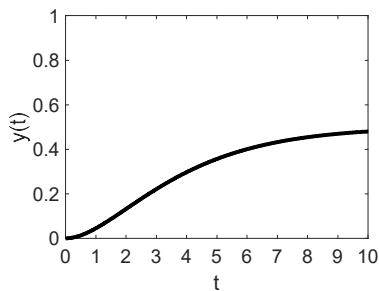
- [1] almeno un autovalore complesso.
- [2] almeno un autovalore reale positivo.
- [3] tutti gli autovalori reali.
- [4] tutti gli autovalori reali positivi.

B) Un sistema lineare ammette un unico stato di equilibrio $\bar{x}$ corrispondente a ingresso costante $\bar{u}$. Si può affermare che il sistema

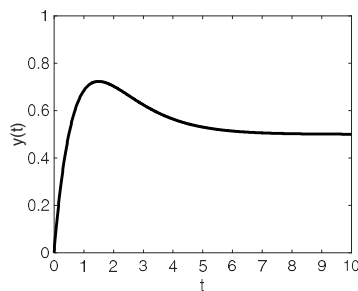
- [1] è asintoticamente stabile.
- [2] è asintoticamente stabile, qualora da qualunque stato iniziale lo stato converga a $\bar{x}$.
- [3] è asintoticamente stabile, qualora da almeno uno stato iniziale lo stato converga a $\bar{x}$.
- [4] è instabile.

C) L'uscita $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 40}$, inizialmente a riposo, avente ingresso $u(t) = 20 \quad \forall t \geq 0$, è pari a

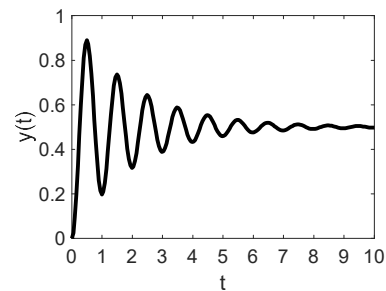
- [1] $y(t) = 20 \quad \forall t \geq 0$



[2]



[3]



[4]

D) La traccia della matrice di stato di un sistema lineare a tempo discreto è pari a -5 . Si può affermare che

- [1] il sistema è asintoticamente stabile, qualora sia di ordine superiore a 5.
- [2] il sistema è instabile, qualora sia di ordine inferiore a 5.
- [3] il sistema è instabile, qualunque sia l'ordine del sistema.
- [4] il sistema è asintoticamente stabile, qualunque sia l'ordine del sistema.

E) Sia dato il sistema non lineare del primo ordine a tempo continuo $\dot{x}(t) = -x^4(t)$, che possiede uno e un solo equilibrio. Si può affermare che

- [1] Il sistema è instabile.
- [2] L'equilibrio è instabile.
- [3] Non si può affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio.
- [4] L'equilibrio è asintoticamente stabile.

A	B	C	D	E
4	2	4	2	2

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente

F) Un sistema lineare a tempo continuo, instabile, di ordine $n = 2$, ha funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Al sistema viene applicato un ingresso $u(t)$ che in ogni istante di tempo è estratto casualmente nell'intervallo $[-1, +1]$. Sulla base delle informazioni disponibili si può affermare che l'uscita del sistema

- [1] è illimitata per ogni $x(0)$.
- [2] è illimitata se $x(0) = 0$.
- [3] è limitata se $x(0) = 0$.
- [4] è limitata per ogni $x(0)$.

G) Un sistema lineare non completamente raggiungibile è stabilizzabile

- [1] se e solo se la sua parte raggiungibile è asintoticamente stabile.
- [2] se e solo se la sua parte non raggiungibile è asintoticamente stabile.
- [3] se e solo se è asintoticamente stabile.
- [4] se e solo se la sua parte raggiungibile è instabile.

H) Un sistema lineare ha risposta a scalino pari a $y(t) = 1 + e^{-t}$. La funzione di trasferimento che lo ha generato è

[1] $G(s) = \frac{2s-1}{s+1}$

[2] $G(s) = \frac{2s+1}{s+1}$

[3] $G(s) = \frac{2s-1}{s-1}$

[4] $G(s) = \frac{2s+1}{s-1}$

I) Un sistema di controllo, di cui si è verificata l'asintotica stabilità, è caratterizzato dalla funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = \frac{10}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}$$

La banda passante B del sistema di controllo è

- [1] $[0, 100]$.
- [2] $[0, 10]$.
- [3] $[10, 100]$.
- [4] $[100, +\infty)$.

L) Sia $L(s)$ la funzione di trasferimento di anello di un sistema di controllo. $L(s)$ è di tipo 0, ha guadagno $\mu > 0$ e due poli reali negativi.

- [1] Il sistema di controllo è asintoticamente stabile per ogni μ .
- [2] Il sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se $\mu > 1$.
- [3] Non vi sono sufficienti informazioni per studiare la stabilità del sistema di controllo.
- [4] Il sistema di controllo è instabile per ogni μ .

F	G	H	I	L
3	2	2	1	1

GIUSTIFICAZIONI (non richieste)

A) Tempo discreto non vi sono oscillazioni: se $\lambda_i \geq 0 \forall i \rightarrow [4]$
 $\hookrightarrow$ reali

B) Tesi: $A \in A.S. \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \exists! \bar{x} \\ x(t) \rightarrow \bar{x} \forall x(0) \end{cases} \rightarrow [2]$

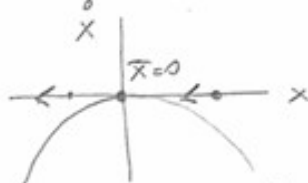
C) $\det[G(s)] = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{59}}{2} \in \mathbb{C} \rightarrow \exists$ oscillazioni $\rightarrow [4]$

D) tempo discreto: $|\text{tr}(A)| > n \Rightarrow$ sistema instabile
 se n è inferiore a 5, il sistema è instabile $\rightarrow [2]$

E) $\dot{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$
 $\frac{\partial f}{\partial x} = -4x^3 \quad \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\bar{x}=0} = 0 \rightarrow$ nessun risultato dal metodo della linearizzazione

(su metodo grafico

$$\dot{x} = -x^4$$



$x(0) < \bar{x} = 0 \rightarrow x(t)$ diverge da $\bar{x} \rightarrow$ l'equilibrio è instabile $\rightarrow [2]$

F) $p = -2 \rightarrow$ il sistema è ES $u(t) \in [-1, 1]$ è limitato
 $u(t)$ limitato $\xrightarrow{\text{E.S.}} y(t) = y_F(t)$ limitata $\rightarrow [3]$
 $x(0) = 0$

NOTA La [4] è errata perché il sistema non è CR/CA e potrebbe avere una parte (NR, θ) instabile che, se inizializzata a valore non nullo, genererebbe un contributo divergente sull'uscita del sistema.

G) (A,b) NON CR è stabilizzabile $\Leftrightarrow$ la sua parte NR è A.S. $\rightarrow [2]$

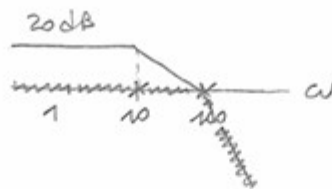
H) $Y(s) = \mathcal{L}[1 + e^{-t}] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{2s+1}{s(s+1)} \quad U(s) = \frac{1}{s}$

$Y(s) = G(s)U(s) \rightarrow G(s) = \frac{2s+1}{s+1} \rightarrow [2]$

In alternative: [1] e [2] sono le uniche f.d.t. che generano un modo e^{-t} , tra di esse la [2] è l'unica che genera $y(t) \rightarrow 1$ $t \rightarrow +\infty$

$$I) |L|_{dB} -$$

$$\left| \frac{L}{1+L} \right|_{dB}$$



$$B = [0, 100] \rightarrow [1]$$

$$L) L(s) = \frac{M}{(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad M, T_1, T_2 > 0 \quad H(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

Non sempre è applicabile il criterio di Bode in quanto non è garantita l'esistenza e unicità di cve (per $0 < \mu \leq 1$)

$\Rightarrow$ Autovalori del sistema di controllo $\rightarrow 1+L(s)=0$

$$s^2 + \underbrace{\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}}_{d_1} s + \underbrace{\frac{1+M}{T_1T_2}}_{d_2} = 0$$

(tc, $n=2$) $d_1, d_2 > 0 \rightarrow$ radici di $1+L(s)$ hanno $\text{Re} < 0 \rightarrow$ il sistema di controllo è A.S. $\forall \mu > 0 \rightarrow [1]$

Problema 2 (7 punti)

L'azienda DataShock assegna in dotazione a ogni dipendente un pc portatile, il quale viene dismesso quando subisce un guasto che non è conveniente riparare ("guasto irreversibile") e comunque, al più tardi, dopo 4 anni di funzionamento. La frazione di pc che subisce un guasto irreversibile nel 1°, 2°, 3° e 4° anno di funzionamento vale, rispettivamente, 0, 0.1, 0.2, 0.5.

- a) Si descriva l'insieme dei pc in dotazione ai dipendenti mediante un sistema lineare, in cui $u(t)$ rappresenti il numero di nuovi pc acquistati all'istante t e $y(t)$ il numero di pc che terminano il 4° anno di funzionamento [specificare esplicitamente il significato delle variabili di stato e riportare sia le equazioni che le matrici (A, b, c, d)].
- b) Discutere la stabilità del sistema, il tempo di risposta e la presenza di oscillazioni nel movimento a ingresso costante.
- c) Determinare la funzione di trasferimento e, da questa, il guadagno del sistema.
- d) Verificare la completa osservabilità del sistema. Proporre quindi una diversa variabile di uscita $y(t)$ che renda il sistema *non* completamente osservabile [è richiesta verifica].

L'azienda vuole implementare una regola per definire in modo automatico ogni anno la quantità $u(t)$ di nuovi acquisti. Si stima che il lavoro svolto da ogni dipendente grazie al pc in dotazione produca un ricavo pari a 10 (in opportune unità), del quale la frazione γ si vuole reinvestire nell'acquisto di nuovi pc di costo unitario pari a 1.

- e) Riformulare le equazioni di stato incorporando la politica di acquisto sopra descritta.
- f) Utilizzando un metodo formale, determinare un valore di γ che renda il sistema così ottenuto asintoticamente stabile e un valore di γ che lo renda instabile.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_i(t)$ = n. di pc che terminano i anni di funzionamento all'istante t (t = anni)

$$x_1(t+1) = u(t)$$

$$x_2(t+1) = 0.9x_1(t)$$

$$x_3(t+1) = 0.8x_2(t)$$

$$x_4(t+1) = 0.5x_3(t)$$

$$y(t) = x_4(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d = 0$$

b) $\sigma_A = \{0, 0, 0, 0\}$ $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i \Rightarrow A$ asintoticamente stabile

↳ sistema a memoria finita

$T_R \leq n = 4$, no oscillazioni (autovalori tutti reali e non negativi)

$$\left. \begin{array}{l} z x_1 = u \\ z x_2 = 0.9 x_1 \\ z x_3 = 0.8 x_2 \\ z x_4 = 0.5 x_3 \\ y = x_4 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \frac{0.5}{z} \times \frac{0.8}{z} \times \frac{0.9}{z} \times \frac{1}{z} u = \underbrace{\frac{0.36}{z^4}}_{G(z)} u$$
$$\mu = G(1) = 0.36$$

d) La F.d.t. ha grado del denominatore uguale all'ordine del sistema ($n=4$), che è quindi completamente osservabile (e anche completamente raggiungibile).

$$\text{se } y(t) = x_1(t) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & \\ \dots & & & \end{bmatrix}$$

$$\det O = 0 \Rightarrow (A, C) \text{ NON completamente osservabile}$$

e) $u(t) = 10\gamma (x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t))$

$$A = \begin{bmatrix} 10\gamma & 10\gamma & 10\gamma & 10\gamma \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \quad x(t+1) = Ax(t)$$

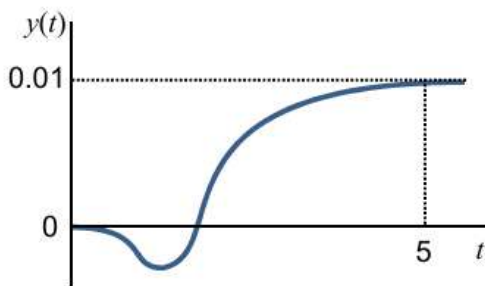
f) A è una matrice non negativa, uso il criterio delle somme di riga/colonna:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 40\gamma \\ r_2 = 0.9 \\ r_3 = 0.8 \\ r_4 = 0.5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{se } \gamma < \frac{1}{40} = 0.025, \text{ allora } r_i < 1 \quad \forall i \\ \Rightarrow \lambda_D < 1 \Rightarrow A \text{ asint. stabile} \\ \text{Esempio: scelgo } \gamma = 0.02. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 10\gamma + 0.9 \\ c_2 = 10\gamma + 0.8 \\ c_3 = 10\gamma + 0.5 \\ c_4 = 10\gamma \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{se } 10\gamma > 1, \text{ allora } c_i > 1 \quad \forall i \\ \Rightarrow \lambda_D > 1 \Rightarrow A \text{ instabile} \\ \text{Esempio: scelgo } \gamma = 0.2. \end{array}$$

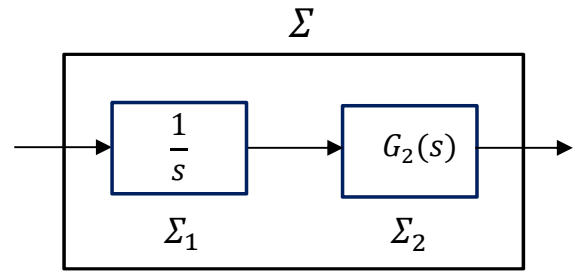
Problema 3 (7 punti)

Un sistema Σ è ottenuto collegando in cascata un sistema Σ_1 , avente funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{1}{s}$, ad un sistema Σ_2 , avente funzione di trasferimento $G_2(s)$.
La risposta a impulso unitario del sistema Σ è mostrata in figura.



$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = -0.1$$



- Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ per il sistema Σ compatibile con tutte le informazioni note (si supponga che i poli di $G_2(s)$ siano tutti coincidenti).
- Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema Σ .
- Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione unitaria (negativa) di Σ .

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) = \frac{1}{s} G_2(s)$$

Risposta a impulso di Σ_1 = risposta a scalino di Σ_2

Risposta limitata $\rightarrow G_2(s)$ E.S.

$$y(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{y} = 0.01 \rightarrow G_2(s) = 0.01$$

estremi: $N=1$ $\rightarrow$ per esempio $G_2(s)$ ha 1 zero
 $\ddot{y}(0) \neq 0 \rightarrow r=2$ $\rightarrow$ e 3 poli (coincidenti)

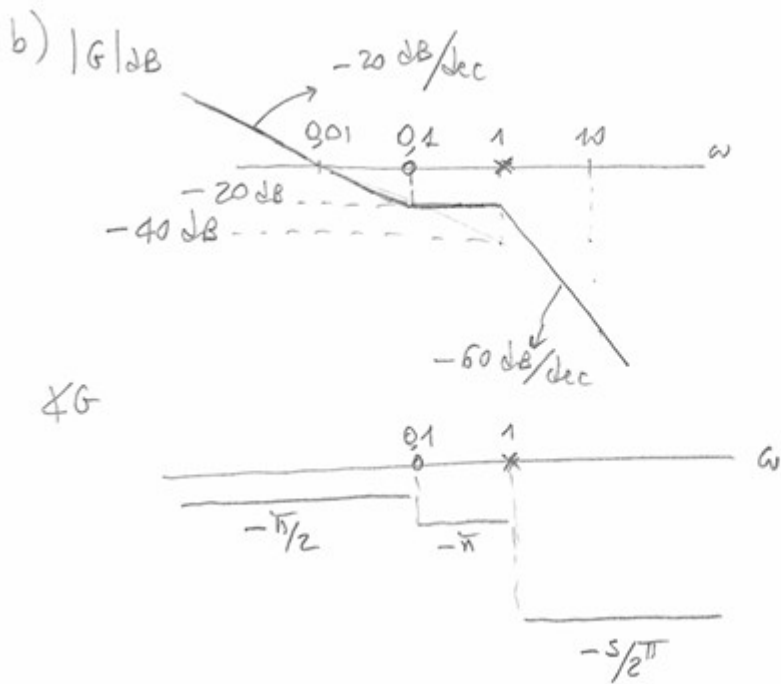
$$\Rightarrow G_2(s) = 0.01 \frac{1+s\tau}{(1+sT)^3}$$

$$T_R = 5 \quad T_D = 1 \quad p_i = -1 \quad \forall i \rightarrow T = 1$$

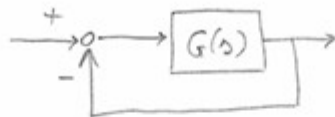
$$\ddot{y}(0) = 0.01\tau = -0.1 \rightarrow \tau = -10$$

nota: lo zero è in $+0.1$ È uno zero superiore $m_z = 1$ $\sigma_z = 0$ $N=1$ r

$$G_2(s) = 0.01 \frac{1-10s}{(1+s)^3} \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{0.01}{s} \frac{1-10s}{(1+s)^3}$$



c) $G(s) = \int \dot{d}t$
di anello



G propria
 G non ha poli a $\text{Re} > 0$ | Bode $M = 90^\circ > 0$
 $|G|_{dB} \cap ! 0 \text{ dB}$ $\varphi_m = \pi/2 > 0$ | il sistema di controllo è AS

$\downarrow$
 in $\omega_c = 0.01$

$$\varphi_c = \angle G(i\omega_c) \sim -\pi/2$$

$$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi/2$$

Problema 4 (6 punti)

Dato un sistema lineare (A, b) , si definiscano i concetti di movimento libero e movimento forzato e se ne fornisca l'espressione nel caso a tempo continuo.

Si fornisca quindi un esempio di sistema a tempo continuo instabile di ordine $n = 1$ e se ne calcoli il movimento forzato nel caso $u(t) = \bar{u} = -1$ per ogni $t \geq 0$, rappresentando inoltre graficamente la soluzione ottenuta.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Movimento libero $x_L(t)$: è il movimento del sistema quando $u(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

Movimento forzato $x_F(t)$: è il movimento del sistema quando $x(0) = 0$.

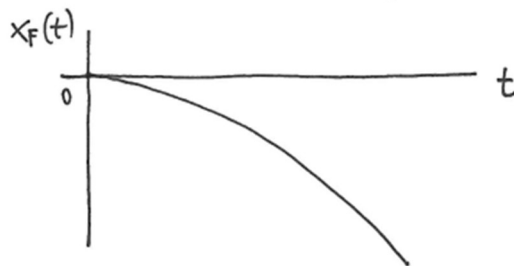
A tempo continuo:

$$x_L(t) = e^{At} x(0)$$

$$x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

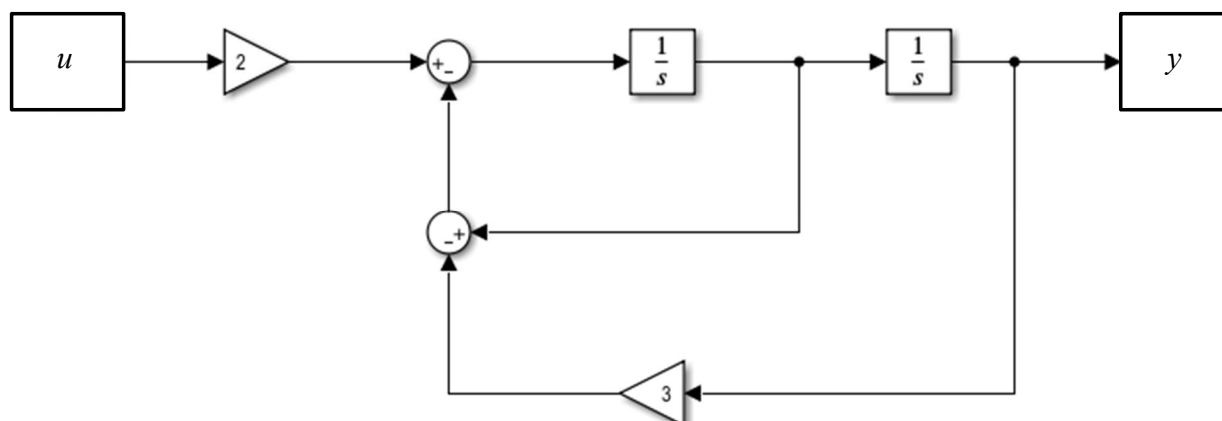
Esempio: $\dot{x}(t) = x(t) + u(t) \quad : \quad A=1 \quad (>0 \Rightarrow \text{instabile})$
 $b=1$

$$\begin{aligned} x_F(t) &= \int_0^t e^{(t-\tau)} \cdot (-1) d\tau = \\ &= -e^t \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^t \cdot \left[-e^{-\tau} \right]_0^t = \\ &= e^t \left[e^{-\tau} \right]_0^t = e^t \left[e^{-t} - 1 \right] = 1 - e^t \end{aligned}$$

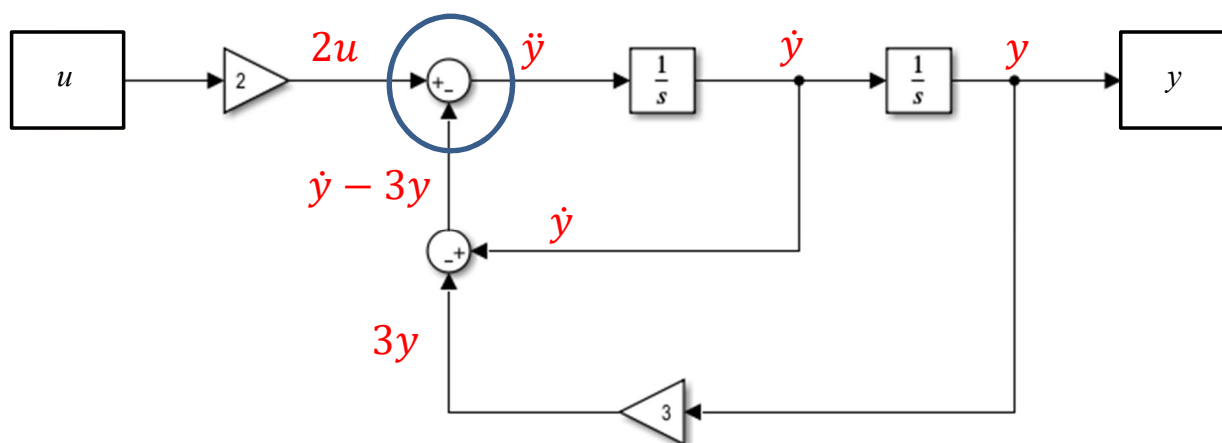


Problema 5 (2 punti)

Scrivere il modello ingresso/uscita (sia in forma di equazione differenziale che di funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink sotto riportato.



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



Dal nodo  si ha:

$$\ddot{y} = 2u - (\dot{y} - 3y) \rightarrow \boxed{\ddot{y} + \dot{y} - 3y = 2u} \rightarrow (s^2 + s - 3)y = 2u \rightarrow \boxed{G(s) = \frac{2}{s^2 + s - 3}}$$