



POLITECNICO MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 6/2/2026

COGNOME: _____ NOME: _____

CODICE PERSONA: _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

10	7	7	6	2
----	---	---	---	---

Voto totale

32

ATTENZIONE!

La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

AVVERTENZE

- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati**.

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!

La prova d'esame è **INSUFFICIENTE** se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ per cui è applicabile il criterio di stabilità di Bode. Se la fase critica risulta pari a $\varphi_c = -205^\circ$, il sistema di controllo

- [1] può essere asintoticamente stabile oppure no, dipende dal valore del guadagno di $L(s)$.
- [2] non è asintoticamente stabile.
- [3] può essere asintoticamente stabile oppure no, dipende dal numero di poli di $L(s)$.
- [4] è asintoticamente stabile.

B) Alle basse frequenze ($\omega \rightarrow 0$), il diagramma di Bode del sistema a tempo continuo $G(s) = 10s^2/(s+1)^3$ ha pendenza

- [1] -20 db/dec.
- [2] -40 db/dec.
- [3] $+20$ db/dec.
- [4] $+40$ db/dec.

C) Un sistema lineare a tempo continuo, asintoticamente stabile, è sottoposto a ingresso sinusoidale di frequenza ω . Per $t \rightarrow \infty$, l'uscita del sistema tende

- [1] a una sinusoide di frequenza multipla intera di ω ($2\omega, 3\omega, \dots$).
- [2] a una sinusoide di frequenza sottomultipla intera di ω ($\omega/2, \omega/3, \dots$).
- [3] a una combinazione lineare di tutte le sinusoidi di frequenza $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$
- [4] a una sinusoide di frequenza ω .

D) Un sistema asintoticamente stabile ha funzione di trasferimento $G(s)$. La sua risposta

- [1] allo scalino è l'anti-trasformata di Laplace di $G(s)$.
- [2] all'impulso è l'anti-trasformata di Laplace di $sG(s)$.
- [3] allo scalino è l'anti-trasformata di Laplace di $G(s)/s$.
- [4] all'impulso è l'anti-trasformata di Laplace di $G(s)/s$.

E) Il sistema a tempo continuo descritto dalle matrici (A, b, c) ha risposta all'impulso

- [1] $cA^t b$.
- [2] $ce^{At} b$.
- [3] $c(I - A)^t b$.
- [4] $-cA^t b$.

A	B	C	D	E
2	4	4	3	2

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente

F) Un sistema lineare di ordine $n = 3$ ha matrice di raggiungibilità di rango 1 e matrice di osservabilità invertibile. I sottospazi di raggiungibilità e osservabilità, nell'ordine, hanno dimensione

- [1] 3 e 3.
- [2] 3 e 1.
- [3] 1 e 3.
- [4] 1 e 1.

G) I due sistemi non lineari a tempo continuo $\dot{x} = x(x^2 - 1)$ e $\dot{x} = x(x^2 + 1)$, entrambi con $x \in \mathbb{R}^1$, possiedono un numero di equilibri, nell'ordine, pari a

- [1] 3 e 3.
- [2] 3 e 1.
- [3] 1 e 3.
- [4] 1 e 1.

H) Il sistema a tempo continuo con matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- [1] è asintoticamente stabile.
- [2] è semplicemente stabile.
- [3] è debolmente (polinomialmente) instabile.
- [4] è fortemente (esponenzialmente) instabile.

I) Un sistema lineare a tempo discreto ha matrice di stato i cui autovalori valgono $\{-2, -1, -0.5\}$. Il sistema

- [1] è asintoticamente stabile.
- [2] è semplicemente stabile.
- [3] è debolmente (polinomialmente) instabile.
- [4] è fortemente (esponenzialmente) instabile.

L) Un sistema lineare a tempo continuo ha funzione di trasferimento $G(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}$. La risposta all'impulso sarà una combinazione lineare di tutte e sole le seguenti funzioni del tempo:

- [1] t, e^t, e^{2t} .
- [2] te^{-t}, te^{-2t} .
- [3] t, e^{-t}, e^{-2t} .
- [4] e^{-t}, e^{-2t} .

F	G	H	I	L
3	2	4	4	4

A) Con Bode: $\mu > 0$
 $\varphi_m > 0$ $\iff$ A.S.

$\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 180 - |-205| < 0 \rightarrow \text{NON A.S.} \rightarrow [2]$

B) G ha zeri nell'origine $\rightarrow$ la pendenza in $\omega \rightarrow 0$ è $+20 \text{ dB/dec} = +40 \frac{\text{dB}}{\text{dec}}$
 [4]

C) $u(t) = U_{\text{sen}} \cos t \rightarrow y(t) = Y_{\text{sen}}(\cos t + \varphi)$
 $\hookrightarrow [4]$

D) $G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \Rightarrow [1], [2] \text{ e } [4] \text{ sono}$
 $\downarrow$ f.d.t. $\hookrightarrow$ risposta all'impulso $\downarrow$ errore

$Y_{\text{sen}}(s) = \mathcal{L}[y_{\text{sen}}(t)] = \frac{1}{s} G(s) \Rightarrow y_{\text{sen}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \rightarrow [3]$

E) a t.c. $G(s) = c(sI - A)^{-1}b \rightarrow g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = ce^{At}b \rightarrow [2]$

F) $\dim(X_R) = \text{rank}(R) = 1$ $\dim(X_\theta) = \text{rank}(\theta) = 3 \rightarrow [3]$
 $\hookrightarrow \det(\theta) \neq 0 \rightarrow \text{rank}(\theta) = 3$

G) $\dot{x} = x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ $\dot{x} = x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow [2]$

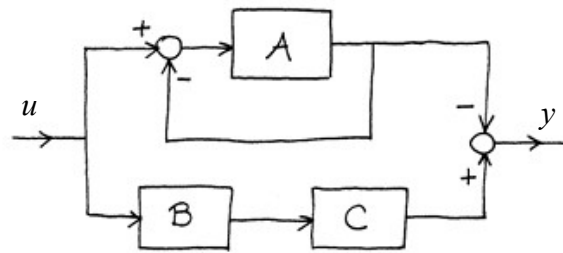
H) $\text{tr}(A) = -1 + 3 + 2 - 2 + 1 = 3 > 0 \xrightarrow{\text{t.c.}} \text{inst} \rightarrow [4]$
 $(\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_5 > 0 \rightarrow \exists \lambda_i: \text{Re}(\lambda_i) > 0)$

I) $\exists \lambda \text{ con } |\lambda| > 1$ ($\lambda = -2$) $\Rightarrow \text{inst} \rightarrow [4]$

L) $G = \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)} = \frac{-4}{s+1} + \frac{6}{s+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} g(t) = -4e^{-t} + 6e^{-2t} \rightarrow [4]$

Problema 2 (7 punti)

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A contiene un integratore mentre il blocco B è descritto dal modello ingresso/uscita

$$\ddot{y}_B + \dot{y}_B + 12y_B = -4\dot{u}_B - 6u_B$$

Il blocco C è descritto dal modello di stato

$$A_C = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & p \end{bmatrix}$$

$$b_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c_C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Studiare la stabilità del sistema aggregato al variare di p ($-\infty < p < +\infty$), discutendo anche l'eventuale esistenza di oscillazioni nelle risposte a ingresso costante.

b) Per i valori di p per cui il sistema è asintoticamente stabile, determinare tutte le costanti tempo e il tempo di risposta.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$G_A = \frac{1}{s} \rightarrow G_R = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

a) R è in parallelo alla cascata di B e C $\Rightarrow$ la stabilità dell'aggregato dipende dalla stabilità dei singoli sottosistemi (R, B e C)

• R è ASINT. STAB. poiché ha $\lambda = -1$

• B ha $\Delta_B(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 12$ e $\Delta_B(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-48}}{2}$

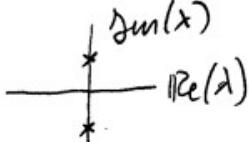
$$\lambda = \frac{-1 \pm i\sqrt{47}}{2} \quad \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \text{Im} \\ \text{Re} \end{array} \Rightarrow \text{B è ASINT. STAB}$$

$\hookrightarrow \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ oscillazioni $\forall p$

• C ha $\text{tr}(A_C) = 2p$

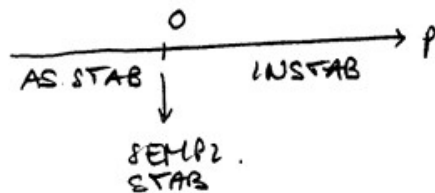
$$\det(A_C) = p^2 + 1 > 0 \quad \forall p$$

$p < 0 \quad \text{tr}(A_c) < 0 \Rightarrow C \text{ è ASINT. STAB.}$

$p = 0 \quad \text{tr}(A_c) = 0 \Rightarrow$  $C \text{ è SEMPL. STAB.}$

$p > 0 \quad \text{tr}(A_c) > 0 \Rightarrow C \text{ è INST.}$

Poiché R e B sono ASINT. STAB., la stabilità dell'aggregato dipende dalla stabilità di C



b) $p < 0$

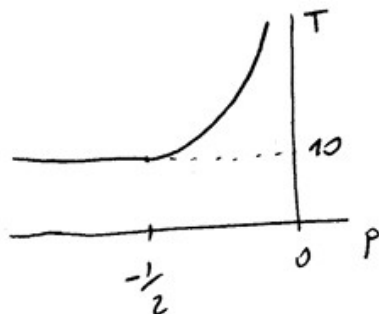
$$\Delta_c(\lambda) = \lambda^2 - 2p\lambda + p^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = p \pm \sqrt{p^2 - p^2 - 1} = p \pm i$$

$$\{\lambda\} = \left\{ -1, \frac{-1 + i\sqrt{47}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{47}}{2}, p + i, p - i \right\}$$

$$\{T\} = \left\{ 1, 2, 2, \frac{-1}{p}, -\frac{1}{p} \right\}$$

$$-\frac{1}{2} \leq p < 0 \rightarrow T_d = -\frac{1}{p} \quad \text{e} \quad T = -\frac{5}{p}$$

$$p < -\frac{1}{2} \rightarrow T_d = 2 \quad \text{e} \quad T = 10$$



Problema 3 (7 punti)

Si consideri il sistema descritto dalla funzione di trasferimento seguente:

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{s + 0.1}{s^2 + s + 100}$$

- Determinare la risposta all'impulso e rappresentarla graficamente.
- Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase.
- Supponendo che l'ingresso applicato al sistema valga $u(t) = 2\sin(10t)$, determinare in modo esatto (calcolo analitico) e approssimato (lettura dal diagramma di Bode del modulo) l'ampiezza dell'uscita a transitorio esaurito, giustificando la differenza nel risultato ottenuto.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$a) \quad G(s) = \frac{10}{s} \frac{s+0.1}{s^2+s+100} = \frac{0.01}{s} \underbrace{(1+10s)}_{\text{forma standard}} \frac{100}{s^2+s+100} = \frac{1}{s} \tilde{G}(s)$$

La risposta all'impulso di $G(s)$ coincide con la risposta allo scalino di $\tilde{G}(s) = 0.01(1+10s) \frac{100}{s^2+s+100}$, che è esternamente stabile e ha grado relativo $r=1$.

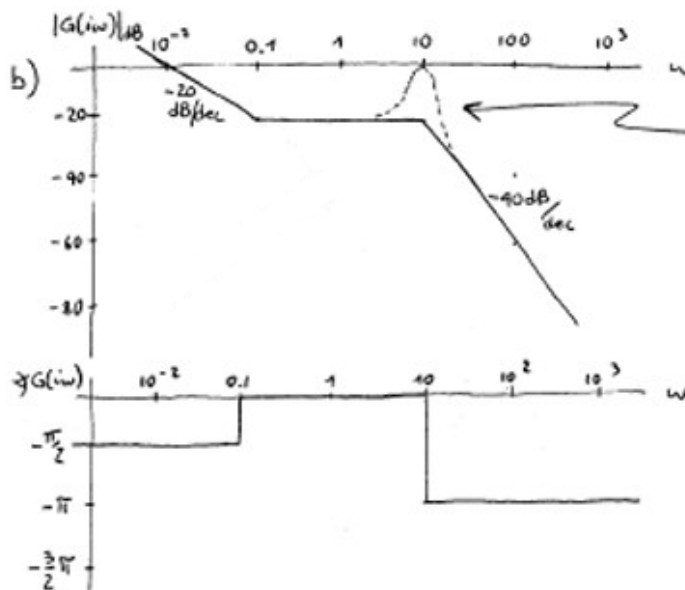
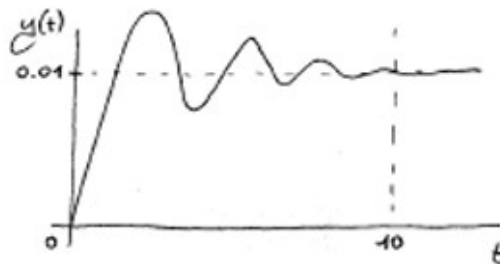
$$y_{\infty} = \tilde{G}(0) \cdot 1 = 0.01$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 G(s) \frac{1}{s} = 10 > 0$$

$$\text{poli: } s = \frac{-1 \pm \sqrt{1-400}}{2},$$

$$T_R \approx 5T_D = 5 \cdot \frac{1}{1/2} = 10, \quad \exists \text{ oscillaz.}$$



poiché lo smorzamento $\xi = \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{20} = 0.05$

è piccolo, esisterà una marcata risonanza per $\omega \approx \omega_n = 10$

c) $y(t) = Y \sin(10t + \varphi)$

$$Y = U |G(i10)|$$

calcolo analitico:

$$|G(i10)| = \frac{0.01}{10} \sqrt{1+100^2} \cdot \frac{100}{10} \simeq 1 \text{ (0 dB)}$$

$$\hookrightarrow Y = 2 \cdot 1 = 2$$

da Bode:

$$|G(i10)| \simeq -20 \text{ dB} = 0.1$$

$$\hookrightarrow Y = 2 \cdot 0.1 = 0.2$$

I due valori ottenuti, fortemente diversi, risentono della risonanza collocata proprio a $\omega=10$, la frequenza di $v(t)$: il diagramma di Bode del modulo è stato tracciato ignorando il fenomeno della risonanza.

Problema 4 (6 punti)

Si consideri il sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ (a tempo continuo) oppure $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$ (a tempo discreto), sottoposto a ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ per ogni $t \geq 0$. Si fornisca, sia nel caso a tempo continuo che in quello a tempo discreto, l'espressione dell'equilibrio $\bar{x}$ in funzione di $A, b, \bar{u}$, specificando sotto quale condizione tale equilibrio esiste unico.

Si proponga quindi un sistema $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$ di ordine $n = 2$ in cui la condizione di esistenza e unicità dell'equilibrio sia violata, e si discuta la stabilità di tale sistema.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$\text{t. continuo: cond. di equilibrio} \quad 0 = A\bar{x} + b\bar{u} \\ \exists! \quad \bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$$



A invertibile

$$\text{t. discreto: cond. di equilibrio} \quad \bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u} \\ \exists! \quad \bar{x} = (I - A)^{-1}b\bar{u}$$



$(I - A)$ invertibile

$$\text{esempio: } A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \det(I - A) = 0$$

$$\sigma_A = \{2, 1\} \quad \exists i: |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A \text{ instabile}$$

Problema 5 (2 punti)

Descrivere ciò che si ottiene digitando in Matlab i seguenti comandi

```
>> A=[1 2; -3 2]; b=[1 0]'; c=[0 1];
```

```
>> ctrb(A,b)
```

```
>> obsv(A,c)
```

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

```
>> A=[1 2; -3 2]; b=[1 0]'; c=[0 1];
```

Il comando assegna alle variabili A, b, e c le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> ctrb(A,b)
```

Il comando determina la matrice di raggiungibilità del sistema

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

```
>> obsv(A,c)
```

Il comando determina la matrice di osservabilità del sistema

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$