# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 16/1/2026

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

| 10 | 7 | 7 | 6 | 2 | | Voto totale 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**ATTENZIONE!**
**La prova d'esame è <u>INSUFFICIENTE</u> se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.**

**AVVERTENZE**

***- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).***

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

**Problema 1** (10 punti)

**ATTENZIONE!**
**La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.**

***Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)***

A) La risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $G(s) = 25s/((s+1)(s+2))$ è la seguente

[1] $10 + 10e^{-t} - 10e^{-2t}$
[2] $10 + 10e^{t} - 10e^{2t}$
[3] $10e^{-t} - 10e^{-2t}$
[4] $10e^{t} - 10e^{2t}$

B) La matrice di stato $A$ del sistema $x(t+1) = Ax(t)$ ha autovalori $\{-1, -i, i, 0, 1\}$. Il sistema è

[1] asintoticamente stabile
[2] semplicemente stabile
[3] debolmente (polinomialmente) instabile
[4] fortemente (esponenzialmente) instabile

C) Un sistema lineare a tempo continuo, completamente raggiungibile e osservabile, ha funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n} \, .$$

[1] Se $\alpha_i \geq 0$ per ogni $i$ allora il sistema è asintoticamente stabile.
[2] Se $\alpha_i > 0$ per ogni $i$ allora il sistema è asintoticamente stabile.
[3] Se il sistema è asintoticamente stabile allora $\alpha_i > 0$ per ogni $i$.
[4] Se il sistema è asintoticamente stabile allora $\alpha_i \geq 0$ per ogni $i$.

D) Per il sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $L(s) = \frac{\mu}{(1+s)(1+10s)}$ con $\mu > 0$, il modulo dell'errore a regime $\bar{e}$ dovuto al solo disturbo additivo in uscita $d(t) = \bar{d}$ costante

[1] cresce al crescere di $\mu$.
[2] decresce al crescere di $\mu$.
[3] vale $\bar{e} = 0$ indipendentemente da $\mu$.
[4] vale $\bar{e} \neq 0$ indipendentemente da $\mu$.

E) Si consideri il sistema a tempo continuo ("integratore") $\dot{x}(t) = u(t), y(t) = x(t)$ :

[1] il movimento libero tende a zero da ogni stato iniziale.
[2] il movimento forzato diverge per ogni funzione $u(t)$ non identicamente nulla.
[3] il sistema è instabile poiché diverge per $\bar{u} > 0$.
[4] il sistema è semplicemente stabile.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 3 | 2 | 4 |

**Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►**

**► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente**

F) Il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$, di ordine $n = 3$, ha un equilibrio $\bar{x}$ la cui matrice jacobiana ha autovalori $\left\{-0.5\,, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\right\}$. In base a questa informazione

[1] l'equilibrio $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.
[2] l'equilibrio $\bar{x}$ è stabile ma non asintoticamente stabile.
[3] l'equilibrio $\bar{x}$ è instabile.
[4] non si può concludere nulla sulla stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$.

G) Il sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$, completamente raggiungibile e osservabile, è sottoposto all'ingresso $u(t) = A\sin(2t + \pi)$. Per $t \to \infty$, l'uscita $y(t)$ tende alla funzione

[1] $0$.
[2] $B \neq 0$, con $B$ opportuno.
[3] $B\sin(t + \alpha)$, con $B, \alpha$ opportuni.
[4] $B\cos(2t + \alpha)$, con $B, \alpha$ opportuni.

H) La risposta allo scalino di un sistema $(A, b, c)$ a memoria finita di ordine $n$, avente guadagno non nullo

[1] tende asintoticamente a zero, per $t \to \infty$.
[2] vale zero, per ogni $t \geq n$.
[3] vale $y(t) = \bar{y} \neq 0$ costante, per ogni $t \geq n$.
[4] tende asintoticamente a $y(t) = \bar{y} \neq 0$ costante, per $t \to \infty$.

I) Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s) = 10/(s^2 - 1)$. Il criterio di Bode

[1] non è applicabile.
[2] è applicabile, e ci porta a dedurre la asintotica stabilità del sistema di controllo.
[3] è applicabile, e ci porta a dedurre la instabilità del sistema di controllo.
[4] è applicabile, e ci porta a dedurre la semplice stabilità del sistema di controllo.

L) Il sistema $S$, formato collegando in parallelo $S_1$ e $S_2$, è fortemente instabile. Se ne deduce che

[1] almeno uno tra $S_1$ e $S_2$ è fortemente instabile
[2] $S_1$ e $S_2$ sono entrambi fortemente instabili
[3] uno tra $S_1$ e $S_2$ è fortemente instabile, l'altro è sicuramente asintoticamente instabile
[4] non è possibile dedurre alcuna informazione sulla stabilità di $S_1$ e $S_2$

| F | G | H | I | L |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 3 | 1 | 1 |

GIUSTIFICAZIONI (non richieste)

A) poli in $-1$ e $-2$ $\rightarrow$ nella risposta a scalino sono presenti i termini $e^{-t}$ ed $e^{-2t}$ $\Rightarrow$ [3]

$G(0) = 0 \rightarrow y_{\infty} = G(0)\bar{u} = 0$

B) $|\lambda_i| \leq 1 \ \forall i$

$\exists j : |\lambda_j| = 1$ + radici semplici di $\psi_A(\lambda)$ $\rightarrow$ semplic. stabile $\Rightarrow$ [2]

C) CR + CO $\rightarrow \{p_i\} \equiv \{\lambda_i\} \rightarrow \text{denom}(G(s)) = \Delta(s)$

$\alpha_i$ = coeff. di $\Delta$

sussiste il teorema (t.c.)

AS $\Rightarrow \alpha_i > 0 \ \forall i$ È corretta la [3]

D) L è di tipo 0 $\rightarrow \bar{e} = \frac{1}{1+\mu}\bar{w} - \frac{1}{1+\mu}\bar{d}$

con $\bar{w} = 0$ $\quad |\bar{e}| = \frac{1}{1+\mu}|\bar{d}|$ se $\mu\uparrow$ $|\bar{e}|\downarrow$ è corretta la [2]

E) $\lambda = 0$ + radice semplice del $\psi_A(\lambda)$ $\rightarrow$ semplic. stabile $\Rightarrow$ [4]

F) $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i$ ha $|\lambda| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$

$\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \rightarrow$ INSTAB $\Rightarrow$ [3]

G) CR + CO $\rightarrow \{p_i\} = \{\lambda_i\} = \{-1, -2\} \rightarrow$ A.S.

$y(t) \rightarrow A|G(2i)| \operatorname{sen}(2t + \pi + \measuredangle G(2i)) = B\cos(2t + \alpha)$ $\Rightarrow$ [4]

H) $x(t) = \bar{x} \ \forall t \geq n \rightarrow y(t) = \bar{y} \ \forall t \geq n$

dove $\bar{y} = \mu\bar{u} = \mu \neq 0 \ \forall t \geq n$ $\Rightarrow$ [3]

I) $p_1 = 1, p_2 = -1$ $\quad \mathbb{R}e(p_1) > 0 \rightarrow$ Bode non è applicabile $\Rightarrow$ [1]

L) $\{\lambda\}_S = \{\lambda\}_{S_1} \cup \{\lambda\}_{S_2}$

S ha almeno un $\lambda$ con $\mathbb{R}e(\lambda) > 0$ che appartiene a $\{\lambda\}_{S_1}$ oppure a $\{\lambda\}_{S_2}$ $\Rightarrow$ [1]

**<u>Problema 2</u>** <u>(7 punti)</u>

Le autovetture circolanti sono suddivise in tre categorie tecnologiche: a motore termico (benzina/diesel), a motore ibrido e a propulsione puramente elettrica. Le emissioni medie annuali di $CO_2$ per ogni autovettura sono stimate in 1000 kg per il termico e 200 kg per l'ibrido (l'elettrico non produce emissioni).
Dopo tre anni ogni proprietario cambia la propria auto oppure smette di comprarne: la frazione $\alpha$ di chi possiede un'autovettura con motore termico ne acquista una con la stessa tecnologia, mentre la frazione $\beta$ acquista un'auto ibrida. La frazione $\gamma$ di chi possiede un'autovettura ibrida riacquista un'autovettura ibrida, mentre la frazione $\delta$ passa a un'autovettura puramente elettrica. Infine, tra chi possiede un'autovettura elettrica, la frazione $\varepsilon$ ne acquista una della stessa tecnologia, mentre la frazione $\theta$ ritorna all'ibrido. Infine, vi sono $u(t)$ nuovi acquirenti ogni triennio, i quali scelgono solo autovetture a motore termico.
I valori dei parametri sono: $\alpha = 0.9$; $\beta = 0.1$; $\gamma = 0.7$; $\delta = 0.1$; $\varepsilon = 0.8$; $\theta = 0.1$.

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema lineare in cui l'uscita $y(t)$ sia il livello di emissioni prodotto dal parco autovetture circolante ($CO_2$ complessivamente emessa nel triennio), verificandone l'asintotica stabilità.

b) Determinare all'equilibrio il livello di emissioni, in funzione del numero (costante) di nuovi acquirenti $\bar{u}$.

Si supponga ora che vi siano interessanti incentivi all'acquisto delle autovetture puramente elettriche. Come conseguenza, ogni triennio, una frazione $\varphi$ dei proprietari di autovetture a motore termico, intenzionati a riacquistare un'autovettura dello stesso tipo, decide invece di acquistarne una puramente elettrica.

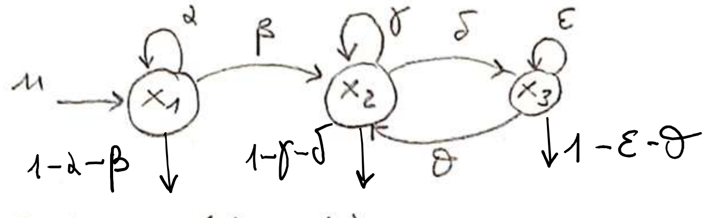
c) Determinare il valore di $\varphi$ che genera a regime un numero di autovetture elettriche doppio di quelle a motore termico.

d) Per il valore di $\varphi$ ottenuto al punto precedente, verificare la stabilità del sistema e valutare il nuovo valore di emissioni a regime.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $x_1(t) =$ # auto motore termico $\qquad t =$ triennio
$x_2(t) =$ " ibride
$x_3(t) =$ " elettriche




$$x_1(t+1) = \alpha x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = \beta x_1(t) + \gamma x_2(t) + \theta x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = \delta x_2(t) + \varepsilon x_3(t)$$

$\Rightarrow x_1(t+1) = 0{,}9x_1(t) + u(t)$

$x_2(t+1) = 0{,}1x_1(t) + 0{,}7x_2(t) + 0{,}1x_3(t)$

$x_3(t+1) = 0{,}1x_2(t) + 0{,}8x_2(t)$

$y(t) = 3\left[1000\, x_1(t) + 200\, x_2(t)\right]$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 3000 & 600 & 0 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

$A, b, c \geq 0 \rightarrow$ Sistema positivo

$\sum$ righe $= 0{,}9$

$\Downarrow$

$\lambda_D = 0{,}9$

$\Downarrow$

A.S.

b) All'equilibrio

$x_1 = 0{,}9\, x_1 + u \rightarrow \bar{x}_1 = 10\,\bar{u}$

$x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}1x_3 \rightarrow 3x_2 = 10u + x_3$

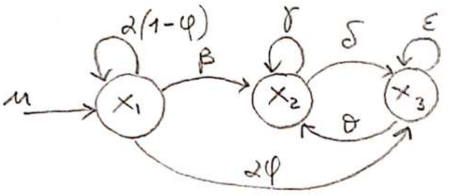
$x_3 = 0{,}1x_2 + 0{,}8\, x_3 \rightarrow x_2 = 2x_3$

$5x_3 = 10\, u$

$\hookrightarrow \bar{x}_3 = 2\bar{u} \qquad \bar{x}_2 = 4\bar{u}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix} \bar{u} \qquad \bar{y} = 3000\,\bar{x}_1 + 600\,\bar{x}_2 = 32\,400\,\bar{u}$$

c)




$x_1(t+1) = 0{,}9(1-\varphi)\, x_1(t) + u(t)$

$x_2(t+1) = 0{,}1\, x_1(t) + 0{,}7\, x_2(t) + 0{,}1\, x_3(t)$

$x_3(t+1) = 0{,}9\,\varphi\, x_1(t) + 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}8\, x_3(t)$

$y(t) = 3\left[1000\, x_1(t) + 200\, x_2(t)\right]$

All'equilibrio $\bar{x}_3 = 2\bar{x}_1$

$x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}1\, x_3 \rightarrow 3x_2 = x_1 + x_3 \rightarrow 3x_2 = 3x_1 \rightarrow x_2 = x_1$

$x_3 = 0{,}9\varphi x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}8x_3$

$\hookrightarrow 2x_3 = 9\varphi x_1 + x_2 \rightarrow \dots$

$$\dots \to 4x_1 = 9\varphi x_1 + x_1 \to 4 = 9\varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{3}$$

d)

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}9(1-\varphi) & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}9\varphi & 0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{\text{A.S.}}{0{,}6} & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ * & A_{22} \end{vmatrix}$$

$$0{,}8 \le \lambda_D \le 0{,}9 \to \text{A.S.}$$

$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

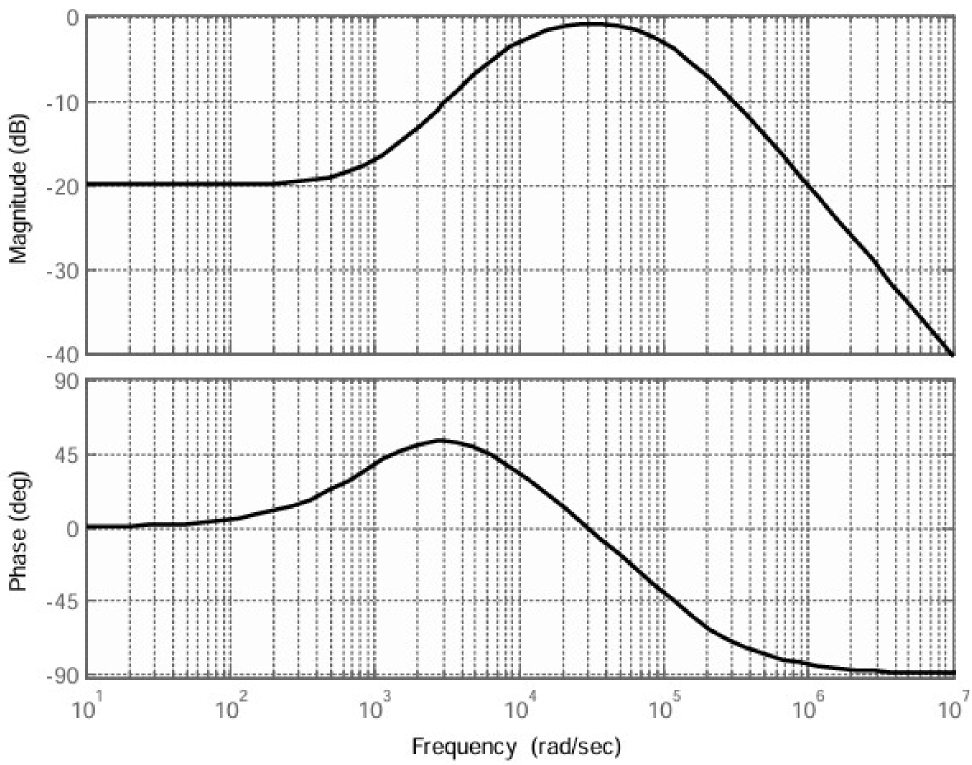
Essendo $A_{11}$ e $A_{22}$ A.S., lo è anche A

$$x_1 = 0{,}6\, x_1 + u \to \bar{x}_1 = \frac{5}{2}\bar{u} = \bar{x}_2$$

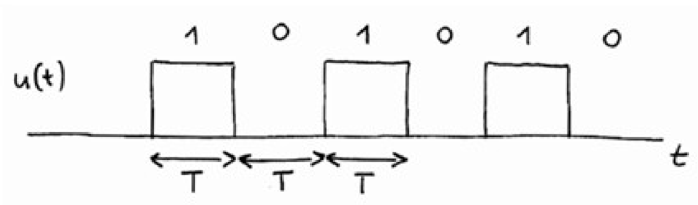
$$\bar{y} = 3\left[1000\, \bar{x}_1 + 200\, \bar{x}_2\right] = 9000\, \bar{u}$$

**Problema 3** (7 punti)

I diagrammi di Bode in figura (modulo e fase) sono stati ricavati mediante una serie di prove effettuate su un'apparecchiatura per trasmissione dati.




L'apparecchiatura è utilizzata per la trasmissione di segnali digitali (sequenze di bit 0 o 1), un esempio dei quali (sequenza alternata …101010…) è in figura. La durata di un bit (vedi figura) è pari a $T$ secondi, per cui la frequenza di trasmissione (bit/secondo) è pari a $f = 1/T$.




a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con le prove sperimentali sopra riportate.

b) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente la risposta allo scalino del sistema.

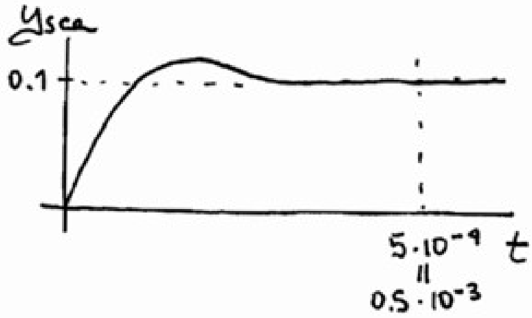
c) Determinare (in modo qualitativo) e rappresentare graficamente il segnale di uscita dell'apparecchiatura quando l'ingresso è la sequenza …10101… in figura, nei casi in cui $f$ = 100, 1000 e 10000 (bit/secondo).

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $G(s) = 0.1 \dfrac{(1+s10^{-3})}{(1+s10^{-4})(1+s10^{-5})}$

b) Risposta allo scalino:



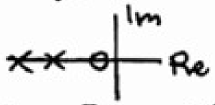

G(s) est. stabile:

$y_\infty = G(0) = 0.1$

$r=1$ : $y(0)=0$ , $\dot{y}(0)>0$

poli reali $\Rightarrow$ NO oscillazioni

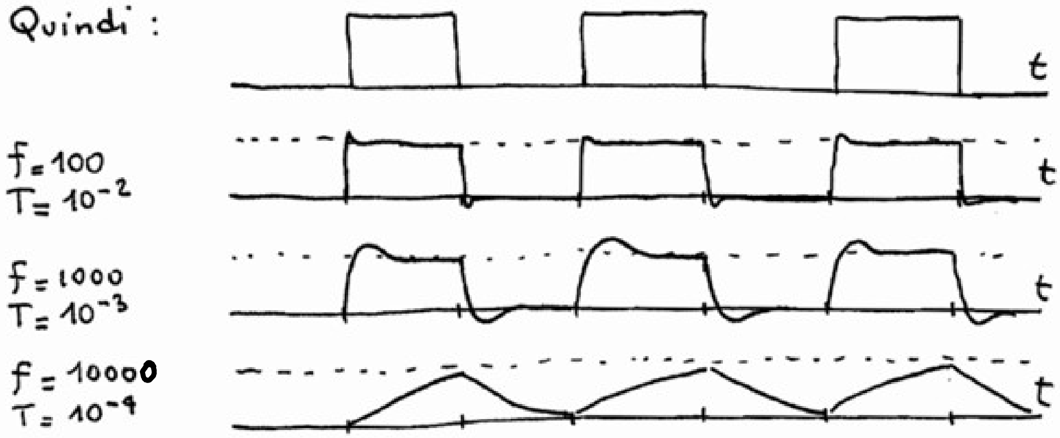
estremi




N=1

$T_R \cong 5T_D = 5\cdot10^{-4}$

c) Quindi:



**Problema 4** (6 punti)

Si definisca la nozione di sistema $(A, c)$ rivelabile. Si enuncino quindi le condizioni note di rivelabilità, specificando se si tratta di condizioni necessarie e/o sufficienti.

Infine, si proponga un sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $y(t) = cx(t)$ di ordine $n = 2$ che sia rivelabile ma non sia asintoticamente stabile, verificando che sussistano le proprietà richieste.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

Il sistema $(A, c)$ è rivelabile se esiste $\ell$ tale che $(A + \ell c)$ è asintoticamente stabile.

⊛ $A$ asintoticamente stabile $\Rightarrow$ $(A, c)$ rivelabile

⊛ $(A, c)$ completamente osservabile $\Rightarrow$ $(A, c)$ rivelabile

Se $(A, c)$ NON completamente osservabile:

⊛ $(A, c)$ rivelabile $\Leftrightarrow$ La parte NON OSSERVABILE è asintoticamente stabile.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$$

$$\exists \lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow A \text{ instabile}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \det \Theta = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $(A, c)$ compl. osservabile

$\Rightarrow$ $(A, c)$ rivelabile

**Problema 5** (2 punti)

In Matlab sono state definite le matrici $(A, b, c, d)$ relative ad un sistema a tempo discreto. Scrivere l'istruzione (o la sequenza di istruzioni) che permette di calcolare il guadagno del sistema.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

```
mu = c * inv(eye(size(A)) - A) * b + d
```