POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 1/9/2025

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

10	7	7	6	2

Voto totale
32

ATTENZIONE!
La prova d'esame è <u>INSUFFICIENTE</u> se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

AVVERTENZE

- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!
La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Il sistema lineare $x(t+1) = Ax(t)$, detti $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ gli autovalori di A, è asintoticamente stabile

[1] se $|Re(\lambda_i)| < 1$ per ogni i.
[2] se $Re(\lambda_i) < 1$ per ogni i.
[3] se $|\lambda_i| < 1$ per ogni i.
[4] se esiste i tale che $|\lambda_i| < 1$.

B) La risposta allo scalino unitario del sistema lineare a tempo continuo con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 2}$$

[1] tende a 1 con oscillazioni sinusoidali smorzate.
[2] tende a 1 senza oscillazioni sinusoidali smorzate.
[3] tende a 0 con oscillazioni sinusoidali smorzate.
[4] tende a 0 senza oscillazioni sinusoidali smorzate.

C) Un sistema a tempo continuo asintoticamente stabile, completamente raggiungibile e osservabile, è sottoposto all'ingresso $u(t) = \sin(t) - 10\sin(2t)$.

[1] L'uscita $y(t)$ è illimitata per qualche stato iniziale.
[2] A transitorio esaurito l'uscita $y(t)$ è sinusoidale.
[3] A transitorio esaurito l'uscita $y(t)$ è una funzione periodica.
[4] A transitorio esaurito l'uscita $y(t)$ è una funzione aperiodica.

D) Per un sistema lineare $x(t+1) = Ax(t)$ con $n = 2$ risulta $trA = 0$ e $detA = 0$. Il sistema è

[1] asintoticamente stabile.
[2] semplicemente stabile.
[3] instabile.
[4] semplicemente stabile o instabile, a seconda di A.

E) L'uscita di un sistema dinamico, al quale è applicata la funzione di ingresso $u(t)$, vale 0 per $0 \leq t \leq 8$ e $u(t-8)$ per $t > 8$. La funzione di trasferimento del sistema vale

[1] $\frac{1}{s+8}$
[2] e^{-8s}
[3] $\frac{1}{s-8}$
[4] e^{-8t}

A	B	C	D	E
3	4	3	1	2

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► **il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente**

F) La funzione di trasferimento $G(s)$ è di tipo h e ha grado relativo r. La pendenza del diagramma di Bode del modulo (misurata in dB/dec) tende a

[1] $-20h$ per $\omega \to 0$ e $-20r$ per $\omega \to \infty$.
[2] $20h$ per $\omega \to 0$ e $-20r$ per $\omega \to \infty$.
[3] $20h$ per $\omega \to 0$ e $20r$ per $\omega \to \infty$.
[4] $-20h$ per $\omega \to 0$ e $20r$ per $\omega \to \infty$.

G) Un sistema a tempo continuo (A, b, c) esternamente stabile

[1] non può essere (internamente) instabile.
[2] è sempre (internamente) asintoticamente stabile.
[3] è (internamente) asintoticamente stabile se è compl. ragg. e compl. oss..
[4] è (internamente) asintoticamente stabile se è completamente raggiungibile.

H) In un sistema lineare $x(t+1) = Ax(t)$ a memoria finita, con $A \neq 0$,

[1] $x(t) = 0$ per ogni $t > 0$, per ogni $x(0)$.
[2] $x(t) = 0$ per ogni $t > n-1$, per ogni $x(0)$.
[3] $x(t) = 0$ per ogni $t > 0$, per almeno un $x(0) \neq 0$.
[4] $x(t) = 0$ per ogni $t > n-1$, solo se $x(0) \neq 0$.

I) Dato un sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con n qualunque risulta $trA = 0$ e $detA = 0$. Il sistema è

[1] asintoticamente stabile.
[2] semplicemente stabile.
[3] instabile.
[4] semplicemente stabile o instabile, a seconda di A.

L) Dati i due sistemi a tempo discreto

$$S_1\colon\ x(t+1) = 0.5x(t) \qquad\qquad S_2\colon\ x(t+1) = -0.5x(t)$$

la convergenza a zero

[1] è più rapida per S_1.
[2] è più rapida per S_2.
[3] ha la stessa rapidità nei due sistemi.
[4] avviene per S_2 ma non per S_1.

F	G	H	I	L
1	3	2	4	3

GIUSTIFICAZIONI (non richieste)

A) tempo discreto : AS $\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1 \ \forall i \rightsquigarrow [3]$

B) $y_\infty = G(0) = 0$

$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-2} = -2 \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R} \rightarrow$ senza oscillazioni $\rightsquigarrow [4]$

C) il sistema è ES $\Rightarrow$ a ingresso limitato corrisponde uscita limitata

Essendo A.S. , y(t) tende a una combinazione lineare di sinusoidi di pulsazioni 1 e 2 $\rightarrow$ è una funzione periodica $\rightsquigarrow [3]$

D) $\left.\begin{array}{l} trA = 0 \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \\ detA = 0 \rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{array}\right| \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \xrightarrow[\text{Td}]{} A.S. \rightsquigarrow [1]$

E) il sistema è un ritardatore di 8 istanti di tempo

$G(s) = e^{-8s} \rightsquigarrow [2]$

F) per $\omega \rightarrow 0$ $\quad G \sim \frac{\mu}{s^h}$ pendenza $-20h$ dB/dec

per $\omega \rightarrow \infty$ $\quad$ pendenza zero +20 dB/dec

pendenza polo −20 dB/dec

$r = \#$ poli $- \#$zer. $\rightarrow$ pendenza $-20 \cdot r$ dB/dec

$\Rightarrow [1]$

G) (R,O) è A.S.

non è nota la stabilità delle eventuali altre parti del sistema

Tuttavia, se il sistema è CR e CO $\Rightarrow$ il sistema ha solo la parte (R,O) ed è A.S. $\rightsquigarrow [3]$

H) $x(t) = A^t x(0)$

$\forall t \geq n : A^t = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall x(0) \rightarrow [2]$

I) $tr(A) = 0 \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$

$det(A) = 0 \rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 0 \xrightarrow[\text{esempio}]{\text{per}} \lambda_1 = 0$

$\lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 <$
- $\exists \lambda_i > 0 \rightsquigarrow$ INST (forte)
- $\lambda_i = 0$ oppure $\pm i\omega \rightsquigarrow$ S.S. o INST (deb)

$\Rightarrow [4]$

L) $S_1 : \lambda_1 = 0{,}5 \rightsquigarrow AS \qquad S_2 : \lambda_2 = -0{,}5 \rightsquigarrow A.S$

$T_1 = -\dfrac{5}{\ln|0{,}5|} \qquad T_2 = -\dfrac{5}{\ln|-0{,}5|}$

$T_1 = T_2 \rightsquigarrow [3]$

Problema 2 (7 punti)

La direzione di un ipermercato vuole studiare i flussi interni di clientela nel corso dell'apertura quotidiana.
L'ipermercato è suddiviso in due grandi zone merceologiche, *food* e *non-food*, oltre alla zona *casse*. Tutti i clienti entrano obbligatoriamente dal reparto *food*, passano un numero arbitrario di volte da un reparto all'altro, ed escono infine dalle casse che sono adiacenti al reparto *non-food*. In base a campionamenti statistici, si è osservato che, mediamente, ogni minuto il 20% dei clienti della zona *food* passa nella zona *non-food*, mentre il 10% dei clienti della zona *non-food* compie il passaggio inverso. Inoltre, il 10% dei clienti della zona *non-food* termina la spesa e si mette in coda alle *casse*. Infine, il 20% dei clienti alle *casse* termina le operazioni di pagamento e lascia l'ipermercato.

a) Descrivere il sistema mediante un modello di stato, in cui $u(t)$ rappresenti il numero di clienti che entrano nell'ipermercato nel corso del minuto t, e $y(t)$ il numero complessivo di clienti nei reparti di vendita (*food* e *non-food*).

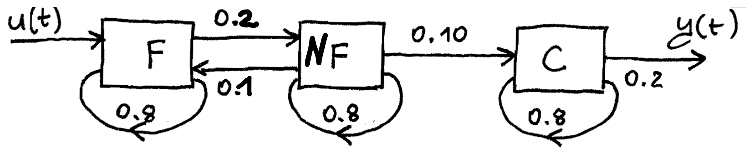
b) Studiare la stabilità del modello.

c) Determinare la funzione di trasferimento del sistema e, utilizzando quest'ultima (quindi NON sulla base del modello di stato), calcolare il numero complessivo di clienti a regime nei reparti di vendita se nell'ipermercato entrano 10 clienti al minuto per tutto il periodo di apertura.

d) Determinare quanto tempo dopo la chiusura serale delle entrate l'ipermercato è vuoto.

e) Verificare che è possibile ricostruire asintoticamente il numero di clienti nei due reparti e nella zona casse.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



F = reparto food
NF = reparto non-food
C = casse

a) $x_1(t)$ = # clienti nel reparto F al minuto t
$x_2(t)$ = " NF "
$x_3(t)$ = " alle casse C "

$x_1(t+1) = 0{,}8\, x_1(t) + 0{,}1\, x_2(t) + u(t)$
$x_2(t+1) = 0{,}2\, x_1(t) + 0{,}8\, x_2(t)$
$x_3(t+1) = 0{,}1\, x_2(t) + 0{,}8\, x_3(t)$
$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

b) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ \hline 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{array}\right]$

$\lambda_1 = 0{,}8$

$A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$ $\quad tr(A_2) = 1{,}6$ $\quad \det(A_2) = 0{,}62$

$\Delta_{A_2} = \lambda^2 - 1{,}6\lambda + 0{,}62 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{1{,}6 \pm \sqrt{1{,}6^2 - 2{,}48}}{2}$ $\begin{array}{l} \nearrow 0{,}9414 = \lambda_2 \\ \searrow 0{,}6586 = \lambda_3 \end{array}$

$|\lambda_i| < 1 \;\; \forall i \Rightarrow$ A.S.

c) NOTA: Solo le variabili x_1 e x_2 intervengono nella relazione ingresso - uscita

$$zx_1 = 0{,}8x_1 + 0{,}1x_2 + u \qquad (z-0{,}8)x_1 = 0{,}1x_2 + u \quad (*)$$
$$zx_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 \;\rightarrow\; (z-0{,}8)x_2 = 0{,}2x_1$$
$$y = x_1 + x_2 \qquad \hookrightarrow x_1 = \frac{z-0{,}8}{0{,}2}x_2 \quad (\circ)$$

sostituisco in $(*)$

$$(z-0{,}8)^2 x_2 = 0{,}02x_2 + 0{,}2u$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{0{,}2}{(z-0{,}8)^2 - 0{,}02}u \qquad \text{e, dalla } (\circ)$$

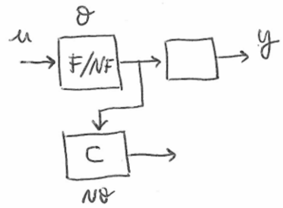
$$x_1 = \frac{z-0{,}8}{(z-0{,}8)^2 - 0{,}02}u$$

$$y = x_1 + x_2 = \frac{z-0{,}6}{(z-0{,}8)^2 - 0{,}02}u \Rightarrow G(z) = \frac{z-0{,}6}{(z-0{,}8)^2 - 0{,}02} = \frac{z-0{,}6}{z^2 - 1{,}6z + 0{,}62}$$

$$\bar{y} = G(1)\bar{u} = \frac{0{,}4}{0{,}02}\cdot 10 = 200$$

d) $$T_R = -\frac{5}{\ln|\lambda_D|} = -\frac{5}{\ln 0{,}9414} \sim 82{,}8 \text{ minuti}$$

e)



$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

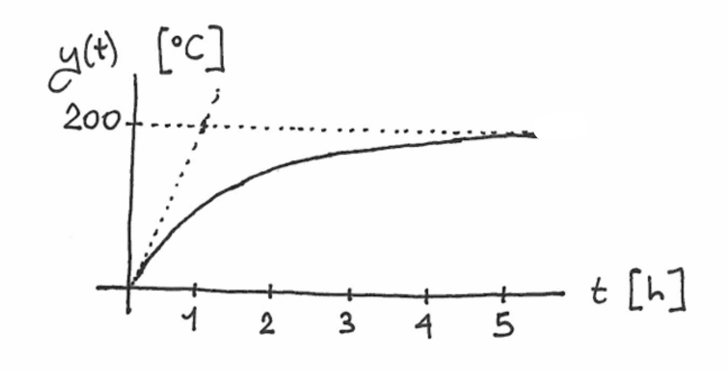
$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}98 & 0{,}82 & 0 \end{vmatrix} \qquad \det \mathcal{O} = 0$$
$\hookrightarrow$ non CO

Il sistema non è CO perché il sottospazio di non osservabilità è $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

Tuttavia, il sistema è AS $\Rightarrow$ è rivelabile $\Rightarrow$ è possibile ricostruire asintoticamente lo stato

Problema 3 (7 punti)

Ad un forno industriale inizialmente spento e a temperatura ambiente (pari a 0 [°C], per semplicità) è stato applicato uno scalino di potenza riscaldante pari a $u(t) = 20000$ [W]. L'andamento registrato della temperatura $y(t)$ all'interno del forno è riportato in figura.



a) Determinare la funzione di trasferimento del forno.

b) Progettare un controllore che:

- garantisca l'asintotica stabilità del sistema di controllo;
- ottenga errore a regime nullo a fronte di ingressi costanti;
- porti il sistema a regime in non più di 5 [h].

c) Il forno funziona con continuità 24 ore su 24 ed è collocato in ambiente aperto. Ipotizzando che la temperatura ambiente sia modellizzabile come un disturbo additivo in uscita che varia in modo sinusoidale, studiare l'effetto sulla temperatura all'interno del forno di un'escursione giorno/notte da +10 [°C] a -10 [°C].

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

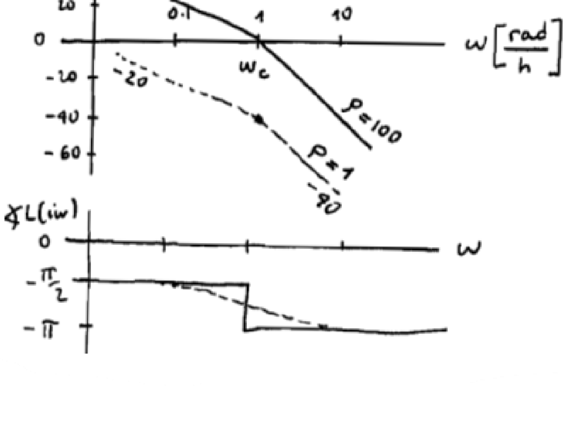
a) La risposta è esponenziale, con costante di tempo $T \simeq 1$.

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{200}{20000} = 0.01 \quad ; \quad G(s) = \frac{0.01}{1+s} .$$

b) Il controllore più semplice è $C(s) = \rho/s$, di tipo 1 per avere errore nullo a regime.

$$L(s) = \frac{0.01\,\rho}{s} \cdot \frac{1}{1+s}$$

E' richiesto $T_R = 5$, quindi $\omega_c \simeq \frac{5}{T_R} = 1$.



Posto $\rho = 100$, otteniamo $\omega_c = 1$, $\varphi_c \simeq -135°$
$\Rightarrow \varphi_m = 45°$ (asint. stabilità del sistema di controllo).

c) Disturbo additivo in uscita :

$$d(t) = 10 \sin(\omega t) \quad , \quad \text{con } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24} \cong 0.26 \left[\frac{rad}{h}\right]$$

$$e_d = -\frac{1}{1+L}\, d \implies e_d(t) = 10 \cdot \left| \frac{1}{1+L(i0.26)} \right| \sin(0.26t + \varphi)$$

$$\cong 10 \frac{1}{|L(i0.26)|} \sin(0.26t + \varphi)$$

entro in banda passante

$$\simeq 2.7 \sin(0.26t + \varphi)$$

± 2.7 [°C] di errore massimo

Problema 4 (6 punti)

Per il sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$, definire i concetti di equilibrio $\bar{x}$ asintoticamente stabile, di bacino di attrazione e di equilibrio globalmente stabile.

Si proponga poi un esempio di sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ di ordine 1, in cui vi sia un equilibrio asintoticamente stabile ma non globalmente stabile, verificando tali proprietà.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

* L'equilibrio $\bar{x}$ è ASINTOTICAMENTE STABILE se

i) è stabile, cioè $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\| x(0) - \bar{x} \| < \delta_\varepsilon$ implica $\| x(t) - \bar{x} \| < \varepsilon \;\; \forall t \geq 0$;

inoltre:

ii) $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x}$, $\forall x(0) : \| x(0) - \bar{x} \| < \delta_\varepsilon$.

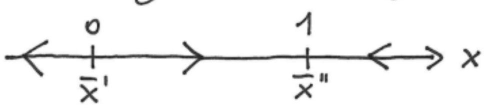
* Dato $\bar{x}$ asintoticamente stabile, il suo BACINO di attrazione è l'insieme $B(\bar{x}) = \{ x(0) \mid x(t) \to \bar{x} \}$.

* $\bar{x}$ asintoticamente stabile è GLOBALMENTE STABILE se $B(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$.

Esempio: $\dot{x}(t) = x(t)\left(1 - x(t)\right)$

equilibri $0 = x(1-x)$: $\begin{cases} \bar{x}' = 0 \\ \bar{x}'' = 1 \end{cases}$

Studio il segno di $\dot{x}$ per ogni x:



$\bar{x}''$ è asintoticamente stabile ma non globalmente stabile.

Problema 5 (2 punti)

Si consideri il seguente sistema lineare a tempo discreto

$$x_1(t+1) = -2x_1(t) - 6x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

Scrivere tutti i comandi Matlab necessari per

a) studiarne la stabilità;

b) studiarne la raggiungibilità;

c) progettare una legge di controllo lineare (con retroazione a partire da tutto lo stato) tale che il sistema controllato annulli i transitori in tempo finito.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) A = [-2 -6; 1 -2]
abs(eig(A)) ⇝ modulo degli autovalori

b) b = [0 1]'
R = ctrb(A,b)
det(R) ⇝ test di CR

c) autoval = [0 0] ⇝ autovalori del sistema controllato
K = acker(A, -b, autoval)