POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 7/7/2025

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

						Voto totale
10	7	7	6	2		32

ATTENZIONE!
La prova d'esame è <u>INSUFFICIENTE</u> se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

AVVERTENZE

<u>- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!
La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Le funzioni di trasferimento di due sistemi lineari sono

$$G_1(s) = \frac{1-s}{(1+0.1s)(1+10s)} \qquad G_2(s) = \frac{1+s}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

I due sistemi hanno

[1] stesso diagramma di Bode del modulo ma diversi diagrammi per la fase.
[2] stessi diagrammi di Bode sia per il modulo che per la fase.
[3] diagrammi diversi di Bode sia per il modulo che per la fase.
[4] diagrammi diversi di Bode del modulo ma stesso diagramma per la fase.

B) Le funzioni di trasferimento di due sistemi lineari sono

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+20s+100} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+100}$$

Il diagramma di Bode del modulo presenta un picco di risonanza

[1] per entrambi i sistemi.
[2] per nessuno dei due sistemi.
[3] solo per $G_1(s)$ ma non per $G_2(s)$.
[4] solo per $G_2(s)$ ma non per $G_1(s)$.

C) Due sistemi Σ_1 e Σ_2 a tempo discreto sono descritti dalle funzioni di trasferimento

$$G_1(z) = \frac{z-2}{z^2-0.25} \qquad G_2(z) = \frac{z-2}{z^2+0.25}$$

Si può affermare che il movimento libero dell'uscita

[1] è monotono per entrambi.
[2] presenta oscillazioni per entrambi.
[3] presenta oscillazioni per Σ_1 ma non per Σ_2.
[4] presenta oscillazioni per Σ_2 ma non per Σ_1.

D) In due esperimenti successivi su un sistema lineare, a parità di ingresso $u(t)$, la sola condizione iniziale $x(0)$ viene dimezzata tra il primo e il secondo esperimento.

[1] l'uscita $y(t)$ dimezza per ogni istante di tempo t.
[2] l'uscita $y(t)$ dimezza solo a regime.
[3] la componente libera dell'uscita $y(t)$ dimezza per ogni istante di tempo t.
[4] la componente forzata dell'uscita $y(t)$ dimezza per ogni istante di tempo t.

E) Un sistema lineare, completamente raggiungibile, è (internamente) instabile ma esternamente stabile. Applicando un ingresso $u(t)$ sinusoidale, l'uscita $y(t)$

[1] è limitata, se e solo se $x(0) = 0$.
[2] è limitata, qualunque sia $x(0)$.
[3] è illimitata, se e solo se $x(0) = 0$.
[4] è illimitata, qualunque sia $x(0)$.

A	B	C	D	E
1	4	2	3	2

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente

F) Il movimento libero di un sistema lineare semplicemente stabile

[1] diverge per almeno uno stato iniziale.
[2] tende a zero per ogni stato iniziale.
[3] non tende a zero per almeno uno stato iniziale.
[4] non tende a zero per ogni stato iniziale.

G) Il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$ di ordine $n = 3$, ha un equilibrio $\bar{x}$ la cui matrice jacobiana ha autovalori $\{-1, 0, 1\}$.

[1] L'equilibrio è asintoticamente stabile.
[2] L'equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile.
[3] L'equilibrio è instabile.
[4] Mediante linearizzazione non è possibile affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio.

H) La risposta allo scalino unitario di un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

è pari a

[1] $e^{-t} - e^{-2t} + 1$
[2] $e^{-t} - e^{-2t}$
[3] $-e^{t} + e^{2t}$
[4] $-e^{-t} + e^{-2t}$

I) Il sistema lineare a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ ha infiniti equilibri se e solo se

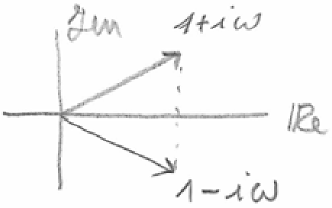
[1] la matrice A ha tutti gli autovalori pari a 1.
[2] la matrice A ha almeno un autovalore pari a 1.
[3] la matrice A ha tutti gli autovalori di modulo pari a 1.
[4] la matrice A ha almeno un autovalore di modulo pari a 1.

L) L'errore a regime di un sistema di controllo asintoticamente stabile con ingressi (riferimento e disturbo additivo sull'uscita) costanti è nullo se la funzione di trasferimento di anello

[1] non ha zeri e poli nell'origine.
[2] ha almeno uno zero nell'origine.
[3] ha almeno un polo nell'origine.
[4] è propria.

F	G	H	I	L
3	4	2	2	3

Giustificazioni (non richieste)

A) 

$|1+i\omega| = |1-i\omega|$

$\measuredangle(1+i\omega) \neq \measuredangle(1-i\omega)$ → stesso modulo ma fasi diverse → [1]

B) poli di G_1 in -10 e -10 $\in \mathbb{R}$ ⇝ no risonanza

poli di G_2 in $-1 \pm i\sqrt{99}$ $\in \mathbb{C}$ → [4]

con $\omega_n = 10$

$2\xi\omega_n = 2 \rightarrow \xi = 0{,}1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⇝ sì risonanza

C) poli di G_1 in $+0{,}5$ e $-0{,}5$ ↳ ∄ oscillazioni td

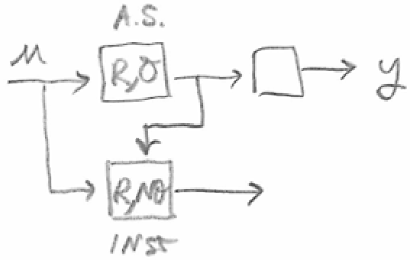
poli di G_2 in $\pm 0{,}5i$ ↳ ∃ oscillazioni td → [2]

D) $y(t) = y_L(t) + y_F(t)$

$y_L(t) \propto x(0)$, $y_F(t) \propto u(t)$

se $x(0) \rightarrow \frac{1}{2}x(0) \Rightarrow y_L(t) \rightarrow \frac{1}{2}y_L(t)$ mentre $y_F(t)$ rimane invariata → [3]

E) Instabilità + E.S. ⇒ il sistema non è O e la parte NO è instabile



La parte (R,NO) potrebbe divergere ma non va sull'uscita

la parte (R,O) è A.S. ⇒

$\forall x(0) : y_L(t) \rightarrow 0$

con $u(t)$ limitato $y_F(t)$ è limitata

$\Rightarrow y(t) = y_L(t) + y_F(t) \rightarrow y_F(t)$ limitata

[2]

F) Per definizione di sistema semplicemente stabile $\rightarrow$ [3]

G) $J_{\bar{x}}$ è semplic. stabile $\rightarrow$ mediante la linearizzazione non è possibile dedurre la stabilità $\bar{x}$ $\rightarrow$ [4]

H) $Y = GU = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$ $\rightarrow$ $y(t)$ è comb. lin. di e^{-t} ed e^{-2t}

$\hookrightarrow \frac{1}{s}$

$\hookrightarrow$ escludo [3]

$y_\infty = G(0) = 0 \rightarrow$ escludo [1]

$$\mathcal{L}\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] = \mathcal{L}\left[e^{-t}\right] - \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{s+2-s-1}{(s+1)(s+2)} = Y$$

[2]

I) Equilibri: $\bar{x} = A\bar{x} \rightarrow (I-A)\bar{x} = 0$

Vi sono infiniti equilibri $\Leftrightarrow \det(I-A) \neq 0$

$\Updownarrow$

$\exists \lambda_i = 1 \rightarrow$ [2]

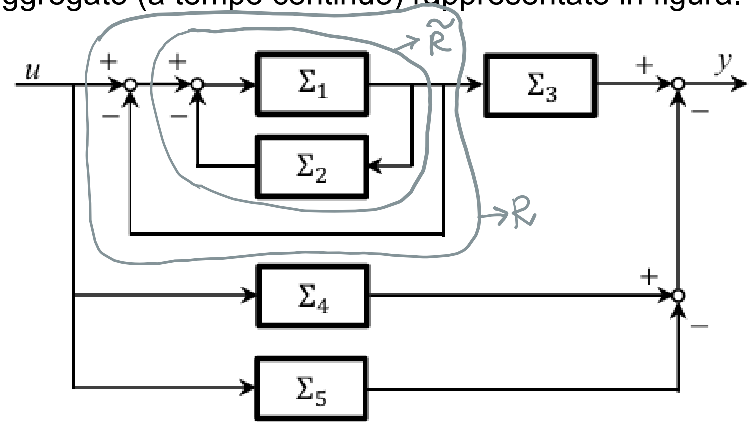
L) $e = \dfrac{1}{1+L} w - \dfrac{1}{1+L} d$ $\qquad L|_{s=0} \sim \mu / s^h$

$$e_\infty = \frac{1}{1+L}\bigg|_{s=0} (\bar{w} - \bar{d}) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{1+L}\bigg|_{s=0} = \frac{s^h}{\mu + s^h} = 0 \text{ con } h > 0$$

[3]

Problema 2 (7 punti)

Si consideri il sistema aggregato (a tempo continuo) rappresentato in figura.



Il sistema Σ_1 è descritto dalla funzione di trasferimento $G_1(s) = \frac{6}{s-1}$. Il sistema Σ_2 è un integratore. I sistemi Σ_3 e Σ_4 sono descritti, rispettivamente, dai modelli di stato

$$A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad b_3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad c_3 = |1 \quad 1 \quad 0 \quad 1| \quad d_3 = 0$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 4 & p \end{vmatrix} \quad b_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad c_4 = |-1 \quad 1| \quad d_4 = 0$$

Infine, il sistema Σ_5 è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_5 + 7\dot{y}_5 + 10y_5 = -\dot{u}_5$.

a) Determinare, motivando adeguatamente, per quali valori del parametro reale p il sistema aggregato risulta asintoticamente stabile, discutendo anche l'eventuale esistenza di oscillazioni nelle risposte a ingresso costante.

b) Per i valori di p per cui il sistema è asintoticamente stabile, determinare tutte le costanti di tempo e il tempo di risposta.

c) Discutere la stabilità del sistema aggregato nel caso in cui il modello ingresso/uscita del sistema Σ_5 venga sostituito dal seguente: $\dddot{y}_5 + \ddot{y}_5 + 7\dot{y}_5 + 10y_5 = -\dot{u}_5$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\tilde{R}$ = retroazione di G_1 e G_2 R = retroazione unitaria di $\tilde{R}$

L'aggregato Σ è ottenuto con collegamenti serie e parallelo di R, Σ_3, Σ_4 e Σ_5

Pertanto, Σ è A.S. se e solo se R, Σ_3, Σ_4 e Σ_5 sono A.S.

$$\tilde{R} = \frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{\frac{6}{s-1}}{1+\frac{6}{s-1}\cdot\frac{1}{s}} = \frac{6s}{s^2-s+6}$$

$$R = \frac{\tilde{R}}{1+\tilde{R}} = \frac{6s}{s^2+5s+6} \rightarrow (\lambda^2+5s+6) = (\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i \Rightarrow R$ è A.S.

$$A_3 = \left|\begin{array}{c|c|cc} -1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right|$$

$\hookrightarrow$ $tr = -5$, $det = 4$ $\quad \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda+4) = 0 \;\; \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$

$\{\lambda\}_{\Sigma_3} = \{-1, -2, -1, -4\} \quad \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \;\forall i \Longrightarrow \Sigma_3$ è A.S.

$$A_4 = \begin{vmatrix} p & -1 \\ 4 & p \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} tr = 2p \\ det = p^2+4 \end{matrix} \quad \lambda^2 - 2p + p^2 + 4 = 0 \quad \lambda_{1,2} = +p \pm 2i$$

$p < 0 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \;\forall i \Longrightarrow \Sigma_4$ è A.S.

$\ddot{y}_5 + 7\dot{y}_5 + 10 = \dots \rightarrow (s^2 + 7s + 10)\, y_5 = \dots \rightarrow \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \;\; \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \;\forall i \rightarrow \Sigma_5$ è A.S.

Pertanto, se $p < 0$, tutti i sistemi sono A.S. e anche l'aggregato

$$\{\lambda\}_{\Sigma} = \{\lambda\}_{R_1} \cup \{\lambda\}_{\Sigma_3} \cup \{\lambda\}_{\Sigma_4} \cup \{\lambda\}_{\Sigma_5} =$$
$$= \{-2, -3, -1, -2, -1, -4, \underbrace{p+2i, p-2i}, -2, -5\}$$

$\exists \lambda_i \in \mathbb{C} \Longrightarrow \exists$ oscillazioni

b) $T_i = -\dfrac{1}{\mathrm{Re}(\lambda_i)} \qquad p < 0$

$$\{T_i\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{p}, -\frac{1}{p}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right\}$$

$T_D = \max_i \{T_i\}$

- $\begin{cases} -\dfrac{1}{p} > 1 \\ p < 0 \end{cases} \rightarrow -1 < p < 0 \qquad T_D = -\dfrac{1}{p}$ e $T_{R_1} \simeq 5T_D = -\dfrac{5}{p}$

- $\begin{cases} -\dfrac{1}{p} \leq 1 \\ p > 0 \end{cases} \rightarrow p \leq -1 \qquad T_D = 1$ e $T_{R_1} \simeq 5$

c) $\dddot{y}_5 + \ddot{y}_5 + 7\dot{y}_5 + 10y_5 = \dots$

$\lambda^3 + \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$

$\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = 7$
$\alpha_3 = 10$

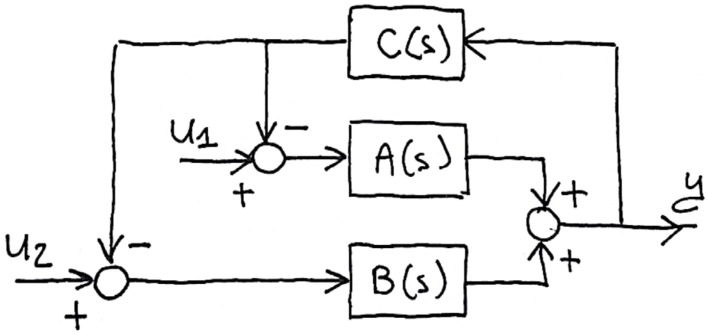
$\alpha_i > 0 \;\forall i$
$\alpha_1\alpha_2 = 7 \not> \alpha_3 = 10 \xrightarrow[\substack{\text{HURWITZ} \\ n=3}]{} \Sigma_5$ non è A.S.

$\downarrow$

Σ non è A.S.

Problema 3 (7 punti)

Si consideri il sistema a tempo continuo in figura, i cui tre blocchi sono descritti dalle funzioni di trasferimento $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$.



a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascun ingresso e l'uscita, esprimendola in funzione di $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$.
b) Si ponga ora

$$A(s) = \frac{1}{s} \;,\quad B(s) = \frac{1}{s+2} \;,\quad C(s) = 1$$

Studiare la stabilità esterna del sistema tra ciascun ingresso e l'uscita.
c) Determinare $y(t)$ in forma esatta (analitica) quando $u_1(t) = u_2(t) = sca(t)$.
d) Determinare $y(t)$ in forma qualitativa quando $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = sca(t-10)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

2) a) $y = A(u_1 - Cy) + B(u_2 - Cy)$

$y(1 + AC + BC) = Au_1 + Bu_2$

$$y = \underbrace{\frac{A}{1+AC+BC}}_{G_1(s)} u_1 + \underbrace{\frac{B}{1+AC+BC}}_{G_2(s)} u_2$$

b) $$G_1(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}} = \frac{s+2}{s^2+4s+2} = \frac{s+2}{(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})}$$

poli : $p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$, $Re(p_i) < 0 \;\forall i \Rightarrow$ ESTERN. STABILE

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}} = \frac{s}{s^2+4s+2} = \frac{s}{(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})}$$

poli come sopra, anche G_2 ESTERN. STABILE

c) $Y(s) = G_1(s)\frac{1}{s} + G_2(s)\frac{1}{s} =$

$$= \frac{s+2}{s(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})} + \frac{s}{s(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2s+2}{s(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2+\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{s+2-\sqrt{2}}$$

$\Longrightarrow \left(\alpha = 1 \;,\; \beta = \gamma = -\frac{1}{2}\right)$ $\quad = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2-\sqrt{2}}$

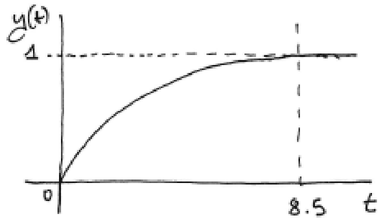
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{1}{2}e^{(-2-\sqrt{2})t} - \frac{1}{2}e^{(-2+\sqrt{2})t}$$

d) risp. scalino di $G_1(s)$: $y(\infty) = G_1(0) = 1$

$T_R \simeq 5\,T_D = 5 \cdot \frac{-1}{-2+\sqrt{2}} \simeq 8.5$

$r = 1 : y(0) = 0 \,,\; \dot{y}(0) = 1$

$m_s = 0 \,,\; \delta = 0 \implies N = 0$

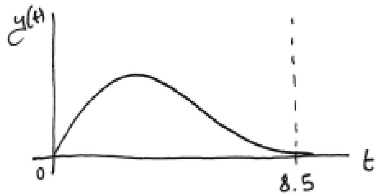


risp. scalino di $G_2(s)$: $y(\infty) = G_2(0) = 0$

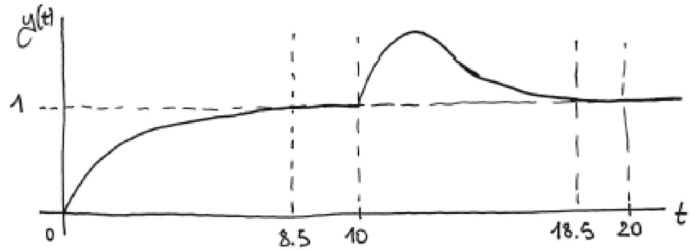
T_R come sopra

$r = 1 : y(0) = 0 \,,\; \dot{y}(0) = 1$

$m_s = 1 \,,\; \delta = 0 \implies N = 1$



Risposta complessiva $\left(u_1(t) = sca(t) \,,\; u_2(t) = sca(t-10)\right)$:



Problema 4 (6 punti)

Si definisca la nozione di sistema (A, b) stabilizzabile. Si enuncino quindi le condizioni note di stabilizzabilità, specificando se si tratta di condizioni necessarie e/o sufficienti.

Infine, si proponga un sistema $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$ di ordine $n = 2$ che sia stabilizzabile ma non sia asintoticamente stabile, verificando che sussistano le proprietà richieste.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Il sistema (A, b) è stabilizzabile se esiste k tale che $(A+bk)$ è asintoticamente stabile.

- A asintoticamente stabile $\Rightarrow$ (A, b) stabilizzabile
- (A, b) completamente raggiungibile $\Rightarrow$ (A, b) stabilizzabile

Se (A, b) non completamente raggiungibile:

- (A, b) stabilizzabile $\Leftrightarrow$ Parte Non Raggiungibile è asintoticamente stabile

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$\exists |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A$ instabile

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\det R = 2 - 3 \neq 0$

$\Rightarrow (A, b)$ compl. ragg.

$\Rightarrow (A, b)$ stabilizzabile

<u>Problema 5</u> <u>(2 punti)</u>

Con riferimento al sistema lineare

$$\dot{x}_1 = 2x_2 - x_3$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 - x_3$$

$$y = x_2 + u$$

caratterizzato da condizione iniziale pari a $x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$.

Scrivere tutti i comandi Matlab necessari per

a) verificare la asintotica stabilità del sistema e calcolarne il tempo di risposta;

b) determinare l'uscita corrispondente a ingresso costante pari a 5 (si utilizzi un orizzonte temporale di simulazione che permetta all'uscita di raggiungere il suo valore di regime).

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a)

```
A=[0 2 -1;-1 -1 0; -1 0 -1]
b=[0 1 0]'
c=[0 1 0]
d=1
autoval=eig(A)
TD=-1/max(real(autoval))
TR=5*TD
```

b)

```
x0=[1 0 -1]'
tempo=linspace(0,2*TR,1000)
u=5*ones(size(tempo))
sistema=ss(A,b,c,d)
lsim(sistema,u,tempo,x0)
```