# POLITECNICO
MILANO 1863

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 9/6/2025

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

| 10 | 7 | 7 | 6 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| Voto totale |
|---|
| 32 |
| |

**ATTENZIONE!**
**La prova d'esame è <u>INSUFFICIENTE</u> se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.**

**AVVERTENZE**

***<u>- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>***

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

**Problema 1** (10 punti)

**ATTENZIONE!**
**La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.**

***Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)***

A) Il sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ha matrice $A$ con polinomio caratteristico $\lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$. Possiamo affermare che

[1] se $\alpha_i > 0$ per ogni $i$, allora il sistema è asintoticamente stabile
[2] se $\alpha_i \geq 0$ per ogni $i$, allora il sistema è asintoticamente stabile
[3] se il sistema è asintoticamente stabile, allora $\alpha_i > 0$ per ogni $i$
[4] se il sistema è asintoticamente stabile, allora $\alpha_i \geq 0$ per ogni $i$

B) Il sistema lineare $(A, b, c, d)$ è asintoticamente stabile. Ciò è sufficiente per affermare che, con ingresso costante $u(t) = \bar{u}\ \forall t \geq 0$,

[1] esiste uno e un solo equilibrio purché $\bar{u} = 0$
[2] esiste uno e un solo equilibrio purché $\bar{u} \neq 0$
[3] esiste uno e un solo equilibrio per ogni $\bar{u}$
[4] esiste almeno un equilibrio purché $\bar{u} \neq 0$

C) Il sistema non lineare x$(t+1) = f(x(t))$, di ordine $n = 4$, ha un equilibrio la cui matrice jacobiana ha autovalori $\{-4, -3, -2, -1\}$.

[1] L'equilibrio è asintoticamente stabile.
[2] L'equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile.
[3] L'equilibrio è instabile.
[4] Mediante linearizzazione non è possibile affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio.

D) Il movimento del sistema lineare $x(t+1) = Ax(t)$

[1] include modi oscillanti se e solo se $A$ ha autovalori complessi
[2] include modi oscillanti se $A$ ha autovalori reali negativi
[3] include modi oscillanti se e solo se $A$ ha autovalori complessi con parte reale negativa
[4] include modi oscillanti se e solo se $A$ è semplicemente stabile

E) Nel sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t)$, di ordine $n = 2$, la matrice $A$ ha traccia nulla e determinante nullo. Ciò è sufficiente per affermare che il sistema

[1] è asintoticamente stabile
[2] è semplicemente stabile
[3] è instabile
[4] non è asintoticamente stabile

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 | 2 | 4 |

**Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►**

► **il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente**

F) Il sistema lineare $(A, b, c, d)$, di ordine $n = 4$, ha sottospazio di non osservabilità $X_{NO}$ di dimensione 1. Ciò è sufficiente per affermare che

[1] La matrice di osservabilità ha rango massimo.
[2] Il sottospazio di osservabilità ha dimensione $n$.
[3] Il sottospazio di raggiungibilità ha dimensione $n - 1 = 3$.
[4] La matrice di osservabilità ha righe non linearmente indipendenti.

G) Il sistema lineare $(A, b, c, d)$ è asintoticamente stabile ed esternamente stabile. Ciò è sufficiente per affermare che

[1] L'insieme dei poli coincide con l'insieme degli autovalori di $A$.
[2] Il sistema è completamente raggiungibile e/o completamente osservabile.
[3] L'uscita rimane limitata per ogni ingresso limitato, almeno per $x(0) = 0$.
[4] L'uscita rimane limitata per ogni ingresso limitato, per ogni $x(0)$.

H) Un sistema lineare a tempo continuo, asintoticamente stabile, ha funzione di trasferimento $G(s)$ con 3 poli e 1 zero. Applicando l'ingresso $u(t) = \sin(t) + 2\sin(3t)$, l'uscita $y(t)$ a transitorio esaurito tenderà a

[1] 0
[2] $A\sin(t + \alpha) + B\sin(3t + \beta)$, con $A, B \neq 0$
[3] $A\sin(t + 3t) = A\sin(4t)$, con $A \neq 0$
[4] $A\sin(t + \alpha)$, con $A \neq 0$

I) Al sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{2}{(s+1)(s+2)} + \frac{100}{s^2+10s+100}\right)$, avente stato iniziale nullo, è applicato in ingresso un impulso. Per $t \to \infty$, l'uscita del sistema

[1] tende a $0$
[2] diverge
[3] tende a $2$
[4] tende a $3$

L) Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s) = 1/s$. Il sistema di controllo $H(s) = L(s)/(1 + L(s))$

[1] è semplicemente stabile
[2] ha poli con parte reale positiva
[3] ha risposta libera caratterizzata da oscillazioni
[4] ha tempo di risposta circa pari a 5

| F | G | H | I | L |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 2 | 3 | 4 |

GIUSTIFICAZIONI (non richieste)

A) t. continuo $\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$

A asint. stabile $\Rightarrow \alpha_i > 0 \ \forall i \rightsquigarrow [3]$

B) Sussiste il teorema

$\Sigma$ asintot. stabile $\Leftrightarrow$ con $u(t) = \bar{u} \ \forall t \geq 0 \begin{cases} \exists \text{ unico } \bar{x} \\ \lim_{t \to +\infty} x(t) = \bar{x} \quad \forall x(0) \end{cases} \rightsquigarrow [3]$

c) $\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \to J_{\bar{x}}$ è fortemente instabile $\to \bar{x}$ è instabile $\rightsquigarrow [3]$
(t.d.)

D) (t.d.)

modi $\nearrow \lambda \in \mathbb{R} \to \lambda^t$ oscillante se $\lambda < 0$

$\searrow \lambda = a + ib = \rho e^{i\vartheta} \in \mathbb{C} \to \lambda^t = \rho^t(\cos\vartheta t + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta t)$ oscillante $\to [2]$

<u>NOTA</u> $\lambda = -2$ (sist. instabile) $\to \lambda^t$ oscillante $\rightsquigarrow [4]$ è falsa

E) $\begin{rcases} tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ det(A) = \lambda_1 \lambda_2 = 0 \end{rcases} \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \rightsquigarrow [4]$

<u>NOTE</u> [1] è falsa poiché vi sono $\lambda$ con $\mathbb{R}e \nless 0$

$\mathbb{R}e(\lambda_i) \leq 0 \Rightarrow$ semplice stabilità oppure instabilità (debole)
a seconda della molteplicità di tali $\lambda_i$ in $\varphi_A(\lambda)$
Quindi [2] e [3] sono false

A. S. $\Leftrightarrow \mathbb{R}e(\lambda_i) < 0 \ \forall i \rightsquigarrow$ è vera la [4]

F) $dim(X_{NO}) = 1 \to$ il sistema non è $\mathcal{O} \to det(\mathcal{O}) = 0 \to [1]$ è falsa
$dim(X_O) = 3 < n = 4 \rightsquigarrow [2]$ è falsa
Osservabilità e raggiungibilità sono proprietà indipendenti $\rightsquigarrow [3]$ è falsa
$det(\mathcal{O}) = 0 \rightsquigarrow [4]$ è vera

G) $y(t) = y_L(t) + y_F(t) = C \underbrace{x_L(t)}_{\propto x(0)} + \underbrace{y_F(t)}_{\propto u(t)}$

$\begin{cases} A.S. \Rightarrow x_L(t) \to 0 \ \forall x(0) \\ E.S. \Rightarrow y_F(t) \text{ limitato con } u(t) \text{ limitato} \end{cases} \to y(t)$ limitato $\forall x(0)$ con ingresso limitato

$\Downarrow$

[4]

H) $u(t) = U\,\text{sen}(\omega t) \xRightarrow{A.S.} y(t) \to Y\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$  $Y = |G(i\omega)|\,U$  $\varphi = \angle G(i\omega)$

è vera la [2]

(La [4] è falsa poiché $|G(3i)| \neq 0$ avendo $G(s)$ un solo zero)

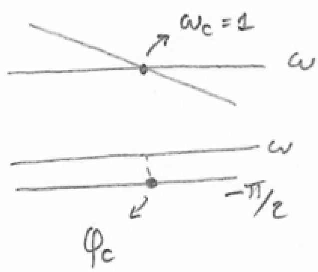
I) Risposta a impulso di $G$ = Risposta a scalino di $\tilde{G}$ con

$$\tilde{G} = \frac{2}{(s+1)(s+2)} + \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

$$\bar{y} = \tilde{G}(0) = \frac{2}{2} + \frac{100}{100} = 2 \to [3]$$

L) $|L|_{dB}$

$\angle L$




L propria
L non ha poli a $\text{Re} > 0$
$|L|_{dB} \cap!\ 0\,dB$
$\xrightarrow{\text{BODE}}$ $\mu = 1 > 0$
$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \frac{\pi}{2} > 0 \to AS$

$\exists\, T_R = \frac{5}{\omega_c} = 5$

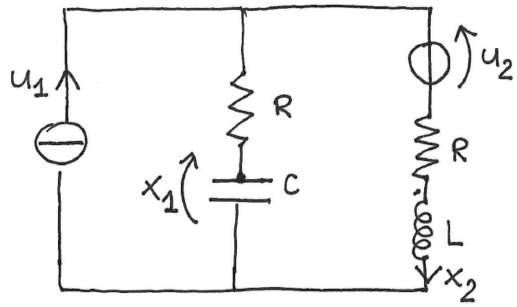
[4]

NOTE [1] è falsa perché il sistema è A.S.

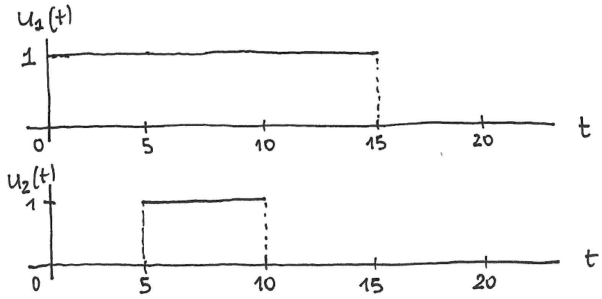
$H = \frac{L}{1+L} = \frac{1}{1+s}$ polo in $\underset{\in \mathbb{R}}{-1}$ $\to$ [2] e [3] sono false

**Problema 2** (7 punti)

Si consideri la rete elettrica in figura, dove $u_1(t)$ è un ingresso prodotto da un generatore di corrente e $u_2(t)$ un ingresso prodotto da un generatore di tensione.




a) Si ponga dapprima $u_2 = 0$ (equivalente a sostituire il generatore $u_2$ con un filo). Scrivere le equazioni di stato del sistema con ingresso $u_1$ e discuterne la stabilità per ogni $R, L, C > 0$.
b) Discutere, per ogni $R, L, C > 0$, la raggiungibilità del sistema discusso al punto a).
c) Si ponga ora $u_1 = 0$ (equivalente a sostituire il generatore $u_1$ con un circuito aperto). Scrivere le equazioni di stato del sistema con ingresso $u_2$ e discuterne la stabilità per ogni $R, L, C > 0$.
d) Discutere, per ogni $R, L, C > 0$, la raggiungibilità del sistema discusso al punto c).
e) Si ponga ora (e non prima) $L = 1$, $R = 5/2$, $C = 1/6$ e si supponga il sistema inizialmente a riposo ($x(0) = 0$). Determinare, in modo qualitativo, la risposta della variabile $y(t) = x_2(t)$ quando ai due ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$ vengono applicati simultaneamente i seguenti segnali:




---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{x}_1 = \frac{1}{C}(u_1 - x_2)$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}(x_1 + R(u_1 - x_2) - Rx_2)$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ 1/L & -\frac{2R}{L} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1/C \\ R/L \end{vmatrix}$$

$\text{tr}\, A = -\frac{2R}{L} < 0, \quad \det A = \frac{1}{LC} > 0$

$\Rightarrow$ A asint. stabile $\forall R, L, C > 0$

b) $$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 1/C & -\frac{R}{LC} \\ R/L & \frac{1}{LC} - 2\frac{R^2}{L^2} \end{vmatrix}$$

$$\det R = \frac{1}{LC^2} - 2\frac{R^2}{L^2C} + \frac{R^2}{L^2C} = \frac{1}{LC^2} - \frac{R^2}{L^2C}$$

$(A, b)$ NON è compl. ragg. se $\det R = 0$, cioè se $L = R^2C$.
E' compl. ragg. altrimenti.

c) $\dot{x}_1 = \frac{1}{C} \cdot (-x_2)$

$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} \cdot \left(-u_2 + x_1 - 2Rx_2\right)$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{vmatrix}$$

A come sopra $\Rightarrow$ asint. stabile $\forall R, L, C > 0$

d) $R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{LC} \\ -\frac{1}{L} & \frac{2R}{L^2} \end{vmatrix}$ $\qquad \det R = \frac{1}{L^2 C} \neq 0 \quad \forall R, L, C > 0$

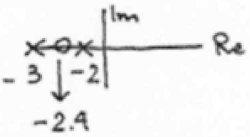
$(A, b)$ compl. ragg. $\forall R, L, C > 0$

e) $y = G_1(s) u_1 + G_2(s) u_2$

$$G_1(s): \begin{cases} s x_1 = \frac{1}{C}\left(u_1 - x_2\right) = 6\left(u_1 - x_2\right) \\ s x_2 = \frac{1}{L}\left(x_1 + R(u_1 - x_2) - Rx_2\right) = x_1 - 5x_2 + \frac{5}{2}u_1 \end{cases}$$

$$y = x_2 \quad \Rightarrow G_1(s) = \frac{\frac{5}{2}s + 6}{s^2 + 5s + 6}$$

risposta allo scalino:



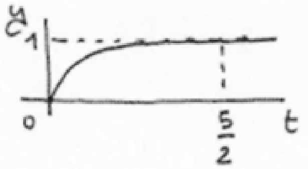

$y(\infty) = G_1(0) = 1$

$r = 1: \; y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = \frac{5}{2} > 0$

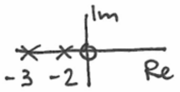
$N = $ n. estremi $= 0$

$T_R = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$




$$G_2(s): \begin{cases} s x_1 = \frac{1}{C} \cdot (-x_2) = -6x_2 \\ s x_2 = \frac{1}{L} \cdot \left(-u_2 + x_1 - 2Rx_2\right) = -u_2 + x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

$$y = x_2 \quad \Rightarrow G_2(s) = \frac{-s}{s^2 + 5s + 6}$$




risposta allo scalino:

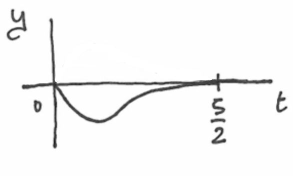
$y(\infty) = G_2(0) = 0$

$r = 1: \; y(0) = 0$

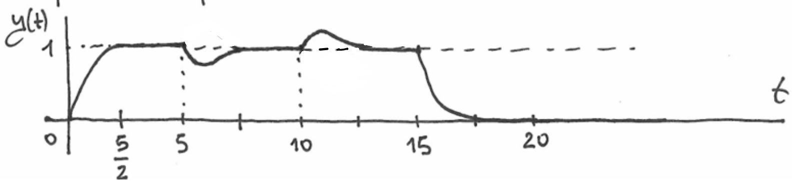
$\dot{y}(0) = -1 < 0$

$N = 1$ (1 zero superiore)

$T_R = \frac{5}{2}$




Risposta complessiva:



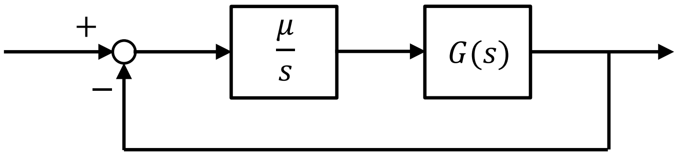
**Problema 3** (7 punti)

Un sistema proprio è sottoposto a prove per ricavarne la funzione di trasferimento.
In particolare, applicando in ingresso uno scalino $u(t)=\bar{u}$, l'uscita $y(t)$ tende al valore $10\bar{u}$ in circa 50 unità di tempo qualunque sia il valore di $\bar{u}$.
Inoltre, applicando ingressi sinusoidali di ampiezza 10 per varie pulsazioni $\omega$ ($u(t)=10sin\,(\omega t)$), si sono rilevate le ampiezze $Y$ e gli sfasamenti $\varphi$ dei corrispondenti segnali di uscita a transitorio esaurito ($y(t)=Ysin\,(\omega t+\varphi)$).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $10^0$ | $10^2$ | $10^4$ | $10^6$ |
| $Y$ | 10000 | 1000 | 100 | 10 |
| $\varphi$ | $0°$ | $-90°$ | $-180°$ | $-270°$ |

a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con le prove sperimentali, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase e valutandone la banda passante.

b) Determinare un valore del parametro $\mu$ che renda il sistema aggregato rappresentato in figura asintoticamente stabile.




---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $u(t)=\bar{u} \rightsquigarrow y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \bar{y} \rightsquigarrow G(s)$ è asintoticamente stabile

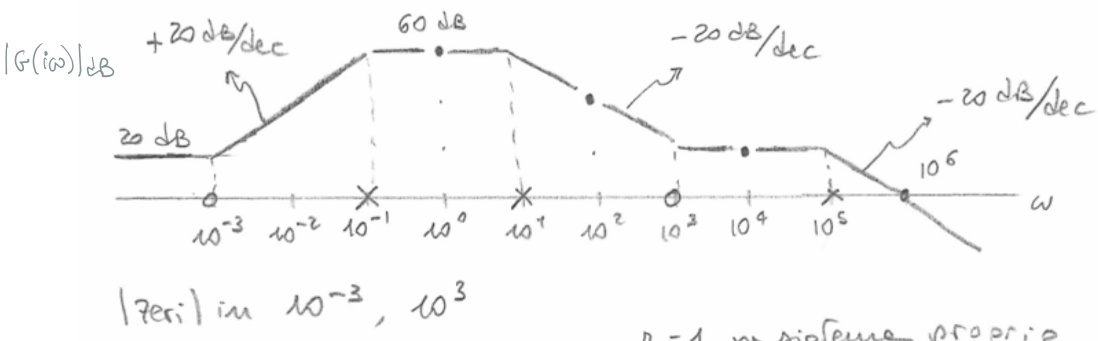
$\bar{y}=10\bar{u} \rightsquigarrow G(0)=\mu=10$

$T_R=50 \rightsquigarrow \mathrm{Re}(p_D)=-0.1$

$|G(i\omega)|=\frac{Y}{U}=\frac{Y}{10}$

| $\omega$ | $10^0$ | $10^2$ | $10^4$ | $10^6$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert G(i\omega)\rvert$ | 1000 | 100 | 10 | 1 |
| $\lvert G(i\omega)\rvert_{dB}$ | 60 dB | 40 dB | 20 dB | 0 dB |
| $\varphi=\measuredangle G(i\omega)$ | 0 | $-\pi/2$ | $-\pi$ | $-\frac{3}{2}\pi$ |

$\mu_{dB}=20$ dB

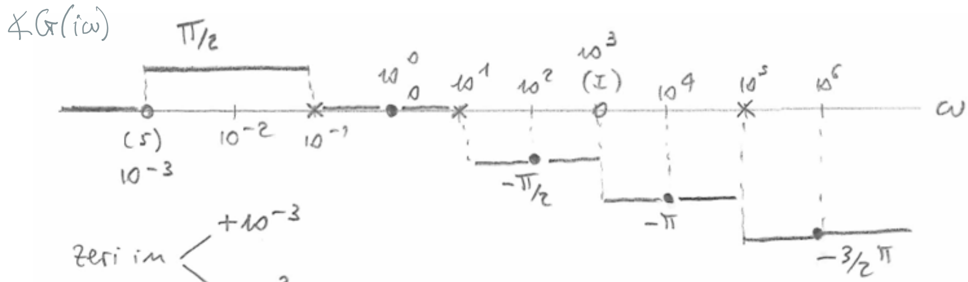



|zeri| in $10^{-3}$, $10^3$

|poli| in $10^{-1}$, $10^1$, $10^5$

$\hookrightarrow |p_D|$

$r=1 \rightsquigarrow$ sistema proprio



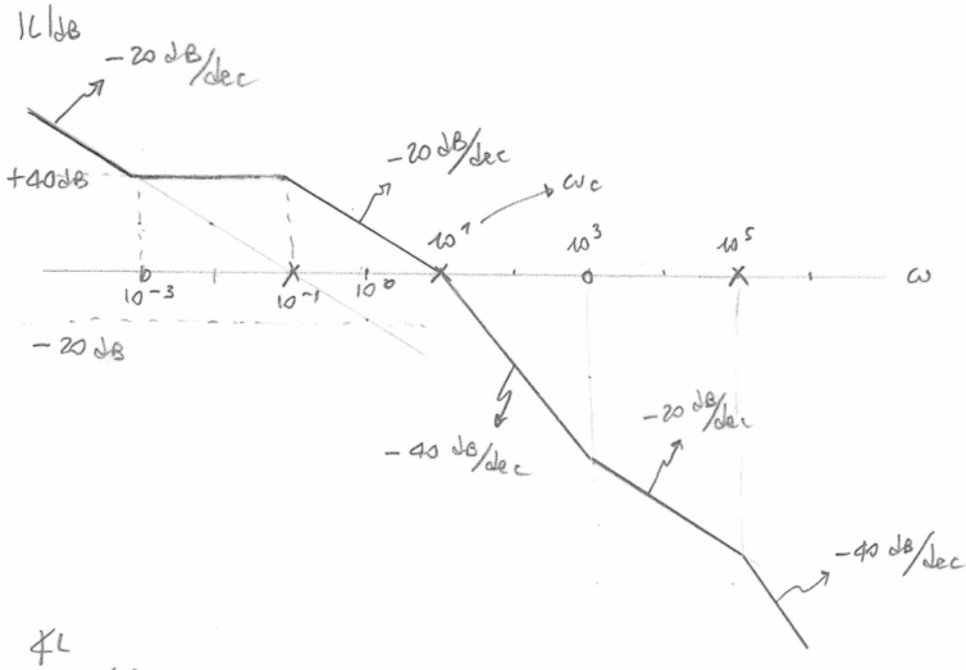

zeri in $+10^{-3}$, $-10^{3}$

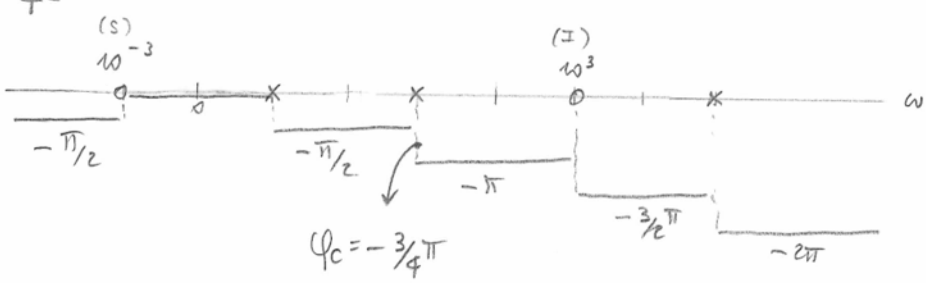
$$G(s) = 10\,\frac{(1+10^{3}s)(1-10^{-3}s)}{(1+10\,s)(1+10^{-1}s)(1+10^{-5}s)}$$

$$BP = (10^{-1}, 10^{1})$$

b) $\mu = 0{,}01$

$$L = CG = \frac{0{,}1}{s}\,\frac{(1+10^{3}s)(1-10^{-3}s)}{(1+10\,s)(1+10^{-1}s)(1+10^{-5}s)}$$




L propria
L non ha poli a $\mathrm{Re}>0$
$|L|_{dB} \cap !\ 0\,dB$

$\xrightarrow{\text{BODE}}$ $\left.\begin{array}{l} \mu_L = 0{,}1 > 0 \\ \varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi - \left|-\frac{3}{4}\pi\right| = \frac{\pi}{4} > 0 \end{array}\right\} \to$ A.S. per $\mu = 0{,}01$

**Problema 4** (6 punti)

Sia dato il sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$ di ordine $n$ e un suo equilibrio $\bar{x}$. Illustrare l'uso del metodo della linearizzazione per l'analisi della stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$.

Inoltre, con riferimento all'equazione

$$\dot{x}(t) = x^3(t) - x^2(t)$$

determinare tutti gli stati di equilibrio studiandone la stabilità, laddove possibile mediante il metodo della linearizzazione, oppure mediante un metodo alternativo.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

$$J = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \rightsquigarrow \text{matrice Jacobiana}$$

$J(\bar{x}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$ e ne determino gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$

$J(\bar{x})$ asintoticamente stabile $\Rightarrow$ $\bar{x}$ asintoticamente stabile
$(\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i)$

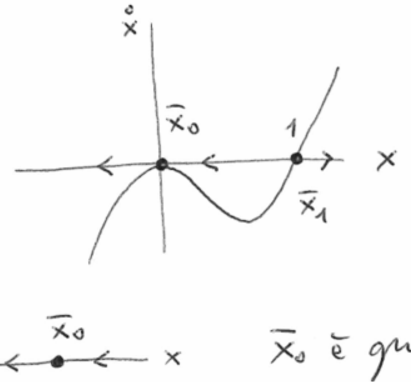
$J(\bar{x})$ fortemente instabile $\Rightarrow$ $\bar{x}$ instabile
$(\exists \lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0)$

$\dot{x} = x^3 - x^2 = f \qquad \dot{x} = 0 \begin{cases} \bar{x}_0 = 0 \\ \bar{x}_1 = 1 \end{cases}$

$J = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x$

$J|_{\bar{x}_1} = 1 = \lambda > 0 \rightarrow \bar{x}_1$ instabile

$J|_{\bar{x}_0} = 0 \rightarrow ?$ uso metodo grafico







$\bar{x}_0$ è quindi instabile

**Problema 5** (2 punti)

Sia dato un sistema di controllo con retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = 0.01\frac{1-s}{s(0.1+s)}$$

avente riferimento $w(t)$ e disturbo $d(t)$.

a) Scrivere tutti i comandi che occorre digitare in Matlab per definire la funzione di trasferimento di anello e valutare la pulsazione critica e il margine di fase del sistema di controllo.

b) Scrivere i comandi necessari per valutare l'ampiezza dell'errore a transitorio esaurito corrispondente a $d(t) = 0.1sen(0.01t)$.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a)
```
NUM = 0.01 * [-1  1]
DEN = conv([1  0],[1  0.1])
L = tf(NUM, DEN)
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(L)
```
Pm → margine di fase

Wcp → pulsazione critica

b)
```
[mod, fase] = bode(1/(1+L), 0.01)
ampiezza_errore = 0.1 * mod
```

NOTA: è possibile valutare 1/(1+L) anche con il comando feedback(1,L)