POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 11/2/2025

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

10	7	7	6	2		Voto totale 32

AVVERTENZE

<u>- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!
La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Il sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, sottoposto a ingresso costante $u(t) = \bar{u}$,

[1] ha almeno un equilibrio, qualunque siano (A, b) e $\bar{u}$
[2] ha uno e un solo equilibrio, qualunque siano (A, b) e $\bar{u}$
[3] ha uno e un solo equilibrio, per ogni $\bar{u}$, se e solo se A è asintoticamente stabile
[4] ha uno e un solo equilibrio, per ogni $\bar{u}$, se e solo se A è invertibile

B) La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare (A, b, c, d)

[1] ha sempre più poli che zeri
[2] ha sempre tanti poli quanti zeri
[3] ha tanti poli quanti zeri se e solo se $d \neq 0$
[4] ha tanti poli quanti zeri se e solo se A è asintoticamente stabile

C) In un sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t)$ instabile

[1] il movimento diverge, per ogni stato iniziale
[2] il movimento diverge, per almeno uno stato iniziale
[3] il movimento tende a zero, per ogni stato iniziale
[4] il movimento resta limitato ma non tende a zero, per ogni stato inziale

D) Il movimento del sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t)$

[1] include modi oscillanti se e solo se A ha autovalori complessi
[2] include modi oscillanti se A ha autovalori reali negativi
[3] include modi oscillanti se e solo se A ha autovalori complessi con parte reale negativa
[4] include modi oscillanti se e solo se A è asintoticamente stabile

E) Il sistema lineare $\dot{x}(t) = u(t)$

[1] è asintoticamente stabile
[2] è semplicemente stabile
[3] è instabile
[4] non è possibile dedurre la stabilità senza conoscere $u(t)$

A	B	C	D	E
4	3	2	1	2

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► **il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente**

F) Il sistema S, formato collegando in parallelo S_1 e S_2, è fortemente instabile. Se ne deduce che

[1] almeno uno tra S_1 e S_2 è fortemente instabile
[2] S_1 e S_2 sono entrambi fortemente instabili
[3] uno tra S_1 e S_2 è fortemente instabile, l'altro è sicuramente asintoticamente instabile
[4] non è possibile dedurre alcuna informazione sulla stabilità di S_1 e S_2

G) Il sistema non lineare $\dot{x}(t) = \sin(x(t))$

[1] non ha stati di equilibrio
[2] ha un numero finito di stati di equilibrio
[3] ha un'infinità numerabile di stati di equilibrio
[4] ha un'infinità non numerabile di stati di equilibrio

H) Il sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ è asintoticamente stabile e non completamente raggiungibile. Mediante una legge di controllo $u(t) = kx(t)$, è possibile fare in modo che il sistema controllato avente matrice di stato $A + bk$

[1] abbia tutti gli autovalori fissabili arbitrariamente
[2] abbia tutti gli autovalori con parte reale negativa
[3] abbia tutti gli autovalori con parte reale positiva
[4] abbia tutti gli autovalori nulli

I) Al sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} + \frac{100}{s^2+10s+100}$ è applicato in ingresso uno scalino unitario. Per $t \to \infty$, l'uscita del sistema

[1] tende a 0
[2] diverge
[3] tende a 2
[4] tende a 3

L) Si consideri la risposta $y(t)$ allo scalino unitario di un sistema a tempo continuo, proprio, con funzione di trasferimento $G(s)$ asintoticamente stabile avente poli e zeri tutti reali.

[1] $y(t)$ non ha estremi (massimi o minimi) se $G(s)$ non ha zeri
[2] $G(s)$ non ha zeri se $y(t)$ non ha estremi
[3] $y(t)$ non ha estremi se gli zeri di $G(s)$ sono tutti negativi
[4] $y(t)$ ha almeno un estremo se $G(s)$ ha almeno uno zero

F	G	H	I	L
1	3	2	3	1

Giustificazioni (non richieste)

A) [4] $\dot{x}=0 \rightarrow A\bar{x}=-b\bar{u}$

Affinché $\exists! \bar{x}$ è necessario e sufficiente che $\exists A^{-1}$ (A invertibile)

$\bar{x}=-A^{-1}b\bar{u}$

B) [3] # poli $\geq$ # zeri $\begin{cases} > & d=0 \\ = & d\neq 0 \end{cases}$

C) [2] Il movimento del sistema $\dot{x}=Ax$ è movimento libero $x_L(t)$

Se il sistema è instabile, per definizione, $\exists x(0)$ tale che $x_L(t)$ diverge

D) [1] Modi $\rightarrow e^{\lambda t}$

Se $\lambda=a+ib \rightarrow e^{\lambda t}=e^{at}(\cos bt + i\,\mathrm{sen}\, bt)$

E) [2] $x_L(t) \Rightarrow u(t)=0$ $\quad \dot{x}(t)=0 \rightarrow x_L(t)=x(0)$

limitato $\forall x(0)$

$\exists x(0) / x_L(t) \not\rightarrow 0$ $\rightarrow$ sempl. stabile

F) [1] $\sigma_S = \sigma_{S_1} \cup \sigma_{S_2}$

$\exists \lambda$ con $\mathrm{Re}(\lambda)>0$ che $\in \sigma_{S_1}$ o $\in \sigma_{S_2}$

G) [3] $\dot{x}=0 \rightarrow \mathrm{sen}\, x=0 \rightarrow x=k\pi$ con $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

H) [2] NON CR $\Rightarrow$ posso fissare a piacere solo gli autovalori della parte R, quelli della parte NR non sono modificabili ma, essendo il sistema A.S., hanno comunque parte reale negativa

I) [3] G_1 e G_2 hanno poli a parte reale $<0 \rightarrow$ sono E.S.

$y_\infty = G_1(0)+G_2(0) = \frac{2}{2}+\frac{100}{100}=2$

L) [1] #zeri $=0 \rightarrow m_S=\delta=0$ e $N=0$ $\quad (m_S \leq N \leq m_S+\delta)$

estremi

Problema 2 (7 punti)

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + u$$
$$y = x_1$$

a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità è l'osservabilità.

b) Progettare un ricostruttore dello stato tale che l'errore di stima vada a zero (approssimativamente) in 0.5 unità di tempo.

c) Progettare una legge di controllo tale che il sistema controllato (sistema + ricostruttore dello stato progettato al punto precedente + legge di controllo) abbia un tempo di risposta pari (approssimativamente) a 5 unità di tempo.

d) Verificare se è possibile controllare il sistema con una retroazione diretta (statica) dall'uscita, cioè $u = ky$, determinando (se esistono) i valori di k per cui il sistema è asintoticamente stabile.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$

$tr(A) = 2 > 0 \rightarrow$ INST

$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \det(R) \neq 0 \rightarrow$ CR

$\vartheta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ $\quad \det(\vartheta) \neq 0 \rightarrow C\vartheta$

b) $T_R^{A+lc} = 0{,}5 \rightarrow T_D^{A+lc} = 0{,}1 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D^{A+lc}) = -10$

Impongo $\sigma_{A+lc} = \{-10, -10\}$

$A + lc = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+l_1 & -2 \\ 2+l_2 & 1 \end{vmatrix}$

$tr(A+lc) = 2 + l_1 = -20$
$\det(A+lc) = 1 + l_1 + 4 + 2l_2 = 100$ $\quad \mapsto l = \begin{vmatrix} -22 \\ \frac{117}{2} \end{vmatrix}$

c) $T_R^{A+bk} = 5 \rightarrow T_D^{A+bk} = 1 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D^{A+bk}) = -1$

Impongo $\sigma_{A+bk} = \{-1, -1\}$

$A + bk = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2+k_1 & 1+k_2 \end{vmatrix}$

$tr(A+bk) = 2 + k_2 = -2$
$\det(A+bk) = 1 + k_2 + 4 + 2k_1 = 1$ $\quad \mapsto k = \begin{vmatrix} 0 & -4 \end{vmatrix}$

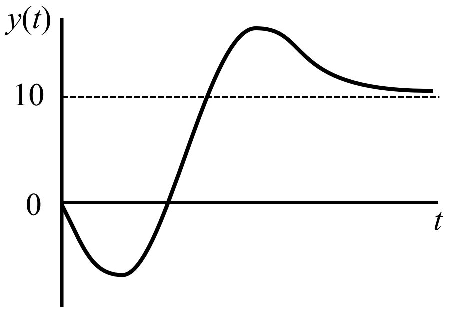
d) $u = ky = kx_1$

$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2$
$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + kx_1$ $\quad \rightarrow \tilde{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2+k & 1 \end{vmatrix}$ $\quad tr(\tilde{A}) = 2 > 0 \ \forall k$

$\Rightarrow$ NON A.S. $\forall k$

Problema 3 (7 punti)

La risposta allo scalino rilevata sperimentalmente su un sistema è quella riportata in figura.



a) Tra tutte le possibili funzioni di trasferimento definite dall'espressione

$$\mu\frac{(1 \pm 0.01s)(1 \pm 10s)}{(1 + 0.001s)(1 + 0.1s)(1 + s)}$$

determinare la funzione $G(s)$ compatibile con la prova sperimentale, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase.

b) Determinare in modo qualitativo, e rappresentare graficamente, la risposta all'impulso del sistema.

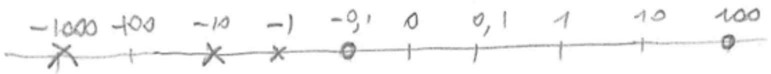
c) Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione (negativa) unitaria di $G(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $y_\infty = G(0) \to \mu = 10$

\# estremi $N=2 \to m_s = 2$ $(\sigma = 0)$

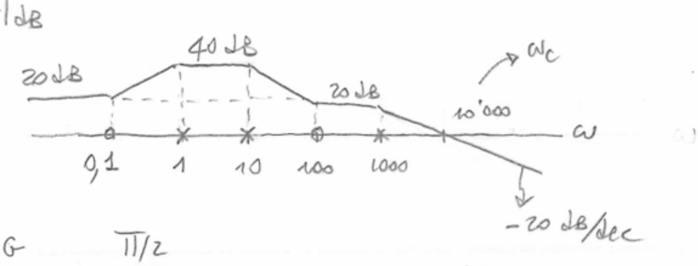
$\dot{y}(0) < 0 \to$ gli zeri hanno segno differente $\to$ zeri in $+100$ e $-0{,}1$



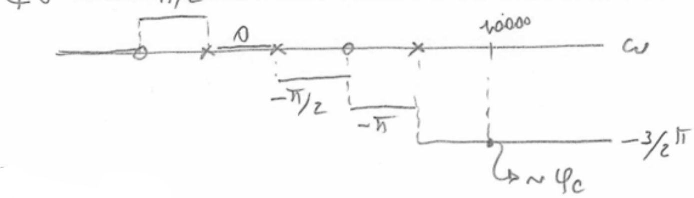
zeri/poli

$$G(s) = 10\,\frac{(1-0{,}01s)(1+10s)}{(1+0{,}001s)(1+0{,}1s)(1+s)}$$

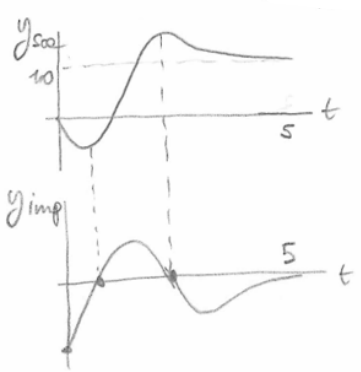
$|G|_{dB}$



$\measuredangle G$

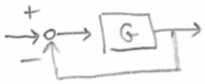


b) $y_{imp} = \dot{y}_{sca}$
$(y_{sca}(0) = 0)$



$p_D = -1$
$T_D = 1$
$T_R = 5$

$y_{imp}(0) = \dot{y}_{sca}(0) = -10^4$

c) 

Criterio di Bode

G propria
$|G|_{dB} \cap ! \; 0\,dB$
G non ha poli a $\mathrm{Re} > 0$

$\rightarrow$ $\mu = 10 > 0$
$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi - |-\frac{3}{2}\pi| = -\pi/2 < 0$ $\longrightarrow$ NON A.S.

Problema 4 (6 punti)

Con riferimento al sistema non lineare a tempo continuo $\dot{x}(t) = f(x(t))$, si enuncino i risultati del teorema di linearizzazione per lo studio della stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$.

Si utilizzino quindi tali risultati per discutere la stabilità dell'equilibrio $\bar{x} = [2 \quad 1]^T$ del seguente sistema:

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1 x_2^2 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 x_2^2 - 2x_2$$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Sia $A(\bar{x}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$ la matrice Jacobiana di f valutata in $x = \bar{x}$.

1) $A(\bar{x})$ asintoticamente stabile (cioè $Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i$) $\Rightarrow$ $\bar{x}$ asintoticamente stabile

2) $A(\bar{x})$ fortemente instabile (cioè $\exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0$) $\Rightarrow$ $\bar{x}$ instabile

$$A(\bar{x}) = \left.\begin{vmatrix} -x_2^2 & -2x_1x_2 + 1 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 - 2 \end{vmatrix}\right|_{x=\bar{x}} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$\mathrm{tr}\, A(\bar{x}) = 1 > 0 \Rightarrow \exists \lambda_i : Re(\lambda_i) > 0$

$\Rightarrow \bar{x}$ instabile

Problema 5 (2 punti)

Scrivere la sequenza di comandi Matlab necessari per visualizza il diagramma di Bode del sistema

$$G(s) = 10\frac{1-s}{(1+10s)^2}$$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$G(s) = \frac{-10s+10}{100s^2+20s+1}$$

```
NUM = [-10 10]
DEN = [100 20 1]
G=tf(NUM, DEN)
bode(G)
```