POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 20/1/2025

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

10	7	7	6	2	Voto totale 32

AVVERTENZE

<u>- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!
La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s) = 10/(s^2 - 1)$. Il criterio di Bode

[1] non è applicabile
[2] è applicabile, e ci porta a dedurre la asintotica stabilità del sistema di controllo
[3] è applicabile, e ci porta a dedurre la instabilità del sistema di controllo
[4] è applicabile, e ci porta a dedurre la semplice stabilità del sistema di controllo

B) Il sistema non lineare a tempo continuo $\dot{x} = f(x)$, di ordine $n = 3$, possiede un equilibrio $\bar{x}$.

[1] Se non esistono altri equilibri, $\bar{x}$ è di sicuro asintoticamente stabile
[2] Se $\bar{x}$ è asintoticamente stabile, allora se esistono altri equilibri sono anch'essi asintoticamente stabili
[3] Se $\bar{x}$ è asintoticamente stabile, allora possono esistere altri equilibri instabili
[4] Se $\bar{x}$ è instabile, allora non possono esistere altri equilibri asintoticamente stabili

C) Il sistema lineare a tempo continuo con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$ è sottoposto all'ingresso $u(t) = imp(t)$. Per $t \to \infty$, l'uscita $y(t)$

[1] tende a zero
[2] tende a un valore costante diverso da zero
[3] diverge poiché il sistema è instabile
[4] oscilla senza convergere né divergere

D) Il sistema lineare a tempo continuo $\dot{x} = Ax + bu,\ y = cx$, di ordine $n = 3$, ha un sottospazio di non osservabilità di dimensione 2.

[1] Gli stati non osservabili appartengono a una retta passante per l'origine
[2] Gli stati non osservabili appartengono a una retta, non necessariamente passante per l'origine
[3] Gli stati non osservabili appartengono a un piano passante per l'origine
[4] Gli stati non osservabili appartengono a un piano, non necessariamente passante per l'origine

E) Il guadagno μ di un sistema (A, b, c, d) a tempo continuo, con autovalori $\sigma_A = \{1, -1, -2\}$, vale

[1] zero qualunque siano (A, b, c, d)
[2] $-cA^{-1}b + d$
[3] $c(I - A)^{-1}b + d$
[4] non è definito poiché il sistema è instabile

A	B	C	D	E
1	3	1	3	2

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente

F) Il sistema lineare (A, b, c) è esternamente stabile. A fronte di un ingresso $u(t)$ limitato, si può affermare che:

[1] $\|y(t)\|$ è limitato per ogni $x(0)$
[2] $\|y(t)\|$ è limitato per almeno un $x(0)$
[3] $\|y(t)\| \rightarrow 0$ per ogni $x(0)$
[4] $\|y(t)\| \rightarrow 0$ per almeno un $x(0)$

G) La risposta allo scalino di un sistema (A, b, c) a memoria finita di ordine n, avente guadagno non nullo

[1] tende asintoticamente a zero, per $t \rightarrow \infty$
[2] vale zero, per ogni $t \geq n$
[3] vale $y(t) = \bar{y} \neq 0$ costante, per ogni $t \geq n$
[4] tende asintoticamente a $y(t) = \bar{y} \neq 0$ costante, per $t \rightarrow \infty$

H) Dato il sistema lineare (A, b, c, d), l'autovalore λ_i della matrice di stato A

[1] è sempre un polo della funzione di trasferimento $G(s)$
[2] è un polo di $G(s)$ se e solo se il sistema è completamente ragg. e osserv.
[3] è un polo di $G(s)$ se e solo se il sistema è compl. raggiungibile o compl. osserv.
[4] è un polo di $G(s)$ se il sistema è completamente ragg. e osserv.

I) A un sistema lineare asintoticamente stabile è applicato l'ingresso $u(t) = -10 + 2\sin(3t)$. A transitorio esaurito, quale funzione di uscita $y(t)$ non è ammissibile?

[1] $-10 + 2\sin(3t)$
[2] $\sin(3t + \pi)$
[3] $10 + \sin(t)$
[4] $2 - \cos(3t - \pi/2)$

L) Il sistema lineare a tempo discreto $x(t + 1) = Ax(t)$ ha autovalori $\{-2, 1 + i, 1 - i\}$. Il movimento libero

[1] diverge, per almeno qualche stato iniziale
[2] diverge, per ogni stato iniziale
[3] tende a zero, per almeno qualche stato iniziale diverso da zero
[4] tende a zero, per ogni stato iniziale

F	G	H	I	L
2	3	4	3	1

PROBLEMA 1

Giustificazioni (non richieste)

A) Il criterio non è applicabile perchè $L(s)$ ha almeno un polo ($p_1 = +1$, $p_2 = -1$) a parte reale positiva $\Rightarrow$ [1]

B) I sistemi non lineari possono ammettere un numero finito di equilibri, ciascuno caratterizzato dalla sua stabilità $\Rightarrow$ [3]

C) Il sistema è A.S. (poli $= -1, -2$); gli viene applicato, passato $t=0$, un ingresso costante nullo $\Rightarrow$ l'uscita tende a 0 ($\bar{y} = \mu \bar{u}$ con $\mu \neq 0$) $\rightarrow$ [1]

D) $X_{NO} = \{$stati non osservabili$\}$
$0 \in X_{NO}$
$\dim(X_{NO}) = 2$
$\Rightarrow$ [3]

E) A tempo continuo, se $\exists A^{-1}$ ($\det(A) \neq 0 \rightarrow \lambda_i \neq 0 \ \forall i$) $\Rightarrow$
$\mu = -cA^{-1}b + d \rightarrow$ [2]

F) E.S. $\overset{def}{\Rightarrow}$ $y_{FOR}(t)$ limitata con $u(t)$ limitato $\Rightarrow$ [2]
$(x(0)=0)$

G) sistemi a memoria finita $x(t) = \bar{x} \ \forall t \geq n$
$\Rightarrow y(t) = c\,x(t) = c\bar{x} = \bar{y} \ \forall t \geq n$
Inoltre $\bar{y} = \mu \bar{u} \neq 0 \Rightarrow$ [3]

H) I poli sono gli autovalori della parte (R, O) del sistema
Quindi, se un sistema è $CR + CO \Rightarrow$ un autovalore è anche un polo $\Rightarrow$ [4]

I) $u(t)$ ha $\omega = 3 \rightarrow$ in uscita non si ha $\omega = 1 \Rightarrow$ [3]

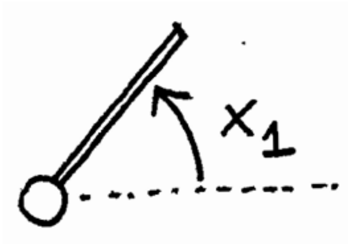
L) Il sistema è instabile $\Rightarrow \exists\, x(0) / x_L(t)$ diverge $\Rightarrow$ [1]

Problema 2 (7 punti)

Un braccio meccanico ruota nel piano orizzontale sotto l'azione di una coppia C proporzionale allo scostamento tra posizione angolare desiderata u ed effettiva x_1:

$$C(t) = k(u(t) - x_1(t))$$

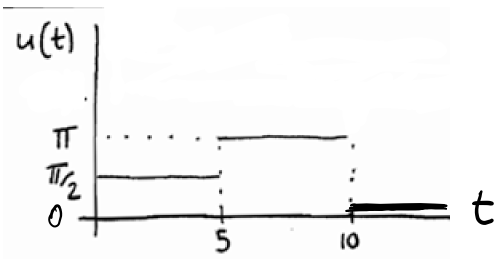
Il braccio meccanico ha momento di inerzia M ed è inoltre soggetto ad attrito viscoso con coefficiente di attrito h.



a) Scrivere le equazioni di stato del braccio meccanico, discutendo poi la stabilità del sistema al variare del parametro k ($-\infty < k < +\infty$).

Si ponga ora $M = 1$ e $h = 4$.

b) Rappresentare graficamente l'andamento nel tempo della posizione angolare del braccio meccanico se al sistema a riposo ($x(0) = 0$) viene applicato l'ingresso in figura, nei due casi $k = 3$ e $k = 68$.



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

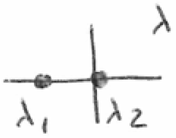
a) x_1 = posizione angolare
x_2 = velocità angolare

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{M}\left[C - h x_2\right] = \frac{1}{M}\left[k(u - x_1) - h x_2\right]$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{h}{M} \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr(A) = -\frac{h}{M} < 0 \\ det(A) = \frac{k}{M} \end{array}$$

- $k > 0$ $\quad det(A) > 0 \rightarrow$ AS ST
- $k < 0$ $\quad det(A) < 0 \rightarrow$ INST
- $k = 0$ $\quad det(A) = 0$, $tr(A) < 0$



$\rightarrow$ SEMPL. STAB.

b)

$\dot{x}_1 = x_2$ $\qquad\qquad\qquad$ $s x_1 = x_2$

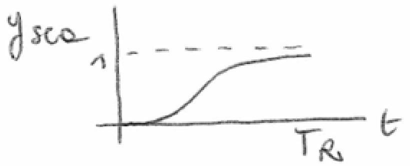
$\dot{x}_2 = -k x_1 - 4 x_2 + k u \rightarrow s x_2 = -k x_1 - 4 x_2 + ku$

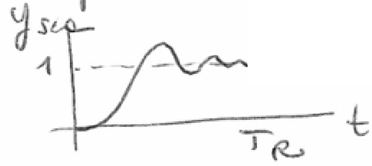
$y = x_1$

$$s^2 x_1 = -k x_1 - 4 s x_1 + ku \rightarrow (s^2 + 4s + k) \underbrace{x_1}_{\rightarrow y} = ku$$

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 4s + k} \qquad \lambda_{1,2} = -2 \pm$$

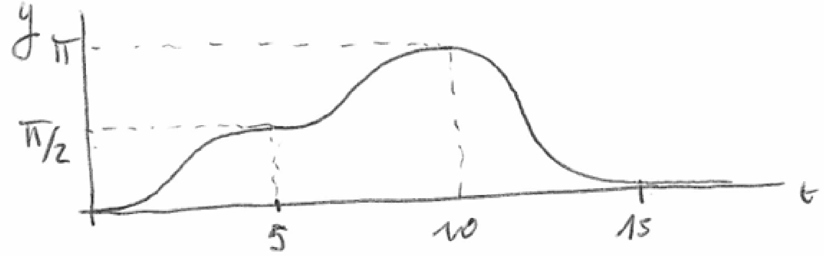
poli $\in \mathbb{R}$ $\qquad\qquad\qquad$ poli $\in \mathbb{C}$



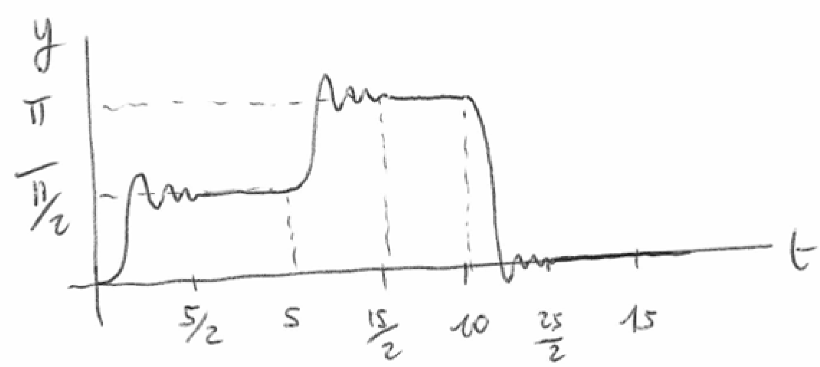


$$u(t) = \pi/2 \text{ sca}(t) + \pi/2 \text{ sca}(t-5) - \pi \text{ sca}(t-10)$$

• $k = 3$ $\quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -3 \qquad \lambda_D = -1$ e $T_R = -\frac{5}{\mathrm{Re}(\lambda_D)} = 5$

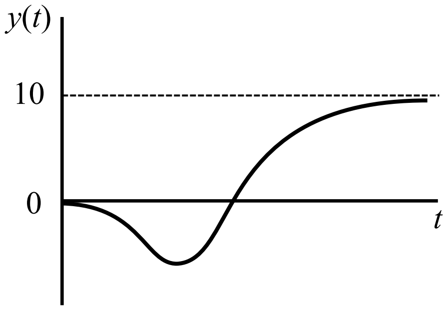


• $k = 68$ $\quad \lambda_{1,2} = -2 \pm 8i \qquad \mathrm{Re}(\lambda_D) = -2$ e $T_R = -\frac{5}{\mathrm{Re}(\lambda_D)} = \frac{5}{2}$



Problema 3 (7 punti)

La risposta allo scalino rilevata sperimentalmente su un sistema è quella riportata in figura, con tangente orizzontale in $t = 0$.



Si sono inoltre effettuate tre rilevazioni sperimentali applicando ingresso sinusoidale del tipo

$$u(t) = Usin(\omega t)$$

alle frequenze $\omega = 0.01; 10;\ 10^4$, ottenendo rispettivamente i valori 10; 100; 0.1 del rapporto di ampiezza uscita/ingresso a regime.

a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con le prove sperimentali, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase.

b) Determinare in modo qualitativo, e rappresentare graficamente, la risposta all'impulso del sistema.

c) Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione (negativa) unitaria di $G(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{y}(0) = 0 \to r \geq 2$

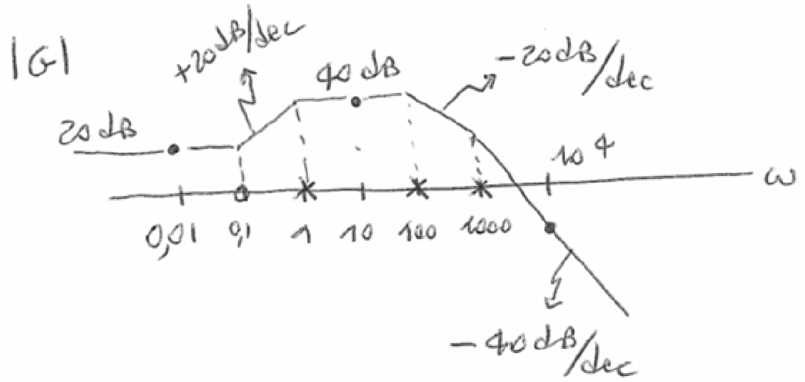
1 estremo $(N = 1) \to$ esiste uno zero superiore $\Rightarrow n \geq 3$

$y_\infty = G(0) = 10$

Una possibile $G(s)$ è del tipo:

$$G(s) = 10 \frac{1 \pm s\tau}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)(1+s\tau_3)}$$

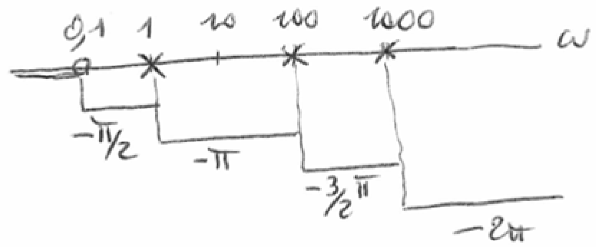
ω	0,01	10	10^4
$\lvert G(i\omega)\rvert_{dB}$	20dB	40dB	-20dB



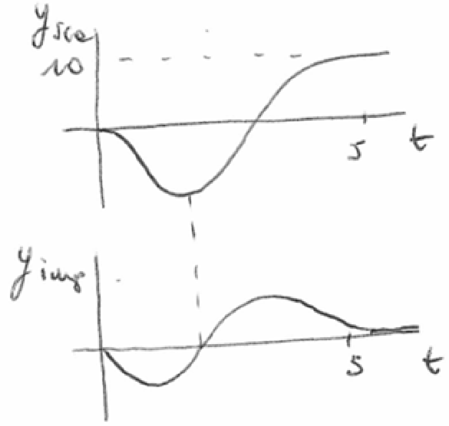
$$\Rightarrow G(s) = 10 \frac{1 \pm 10s}{(1+s)(1+0{,}01s)(1+0{,}001s)}$$

$$\dot{y}(0) < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(zero) > 0 \Rightarrow G(s) = 10 \frac{1 - 10s}{(1+s)(1+0{,}01s)(1+0{,}001s)}$$

$\measuredangle G$



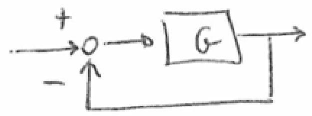
b) $y_{sca}(0)=0 \rightarrow y_{imp}(t) = \frac{dy_{sca}(t)}{dt}$



$P_D = -1$

$T_R = 5$

c)



$G = L$

Criterio di Bode

- L propria
- $|L|_{dB} \cap ! \; 0\,dB \rightarrow \omega_c$ è unica, $\omega_c \in (10^3, 10^4)$
- L non ha poli a $\mathrm{Re}(p) > 0$

$\mu = 10 > 0$

$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| < 0 \Rightarrow$ NON A.S.

$\varphi_c = \measuredangle L(i\omega_c) < -\pi$

Problema 4 (6 punti)

a) Si fornisca la definizione di sistema stabilizzabile, discutendo poi sotto quali condizioni (sufficienti e/o necessarie) un sistema risulta stabilizzabile.

b) Si proponga poi un esempio numerico di sistema di ordine $n = 2$ che sia instabile, non completamente raggiungibile ma stabilizzabile, determinando numericamente una legge di controllo k che sia stabilizzante.

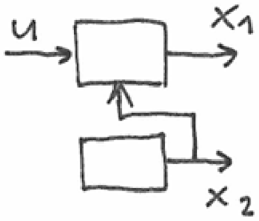
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Il sistema (A, b) è stabilizzabile se esiste K tale che $A+bk$ è asintoticamente stabile.

(A, b) completamente raggiungibile $\Rightarrow$ (A, b) stabilizzabile

(A, b) NON completamente raggiungibile:

(A, b) stabilizzabile $\Leftrightarrow$ la parte non raggiungibile di (A, b) è asintoticamente stabile

b) 

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}\right\}$$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

A instabile

$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

(A, b) non compl. ragg.

$$A+bk = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} |k_1 \;\; k_2| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+k_1 & 1+k_2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Per avere $A+bk$ asint. stabile basta porre $1+k_1 < 0 \Rightarrow k_1 < -1$.

Problema 5 (2 punti)

Sia dato il sistema lineare

$$x_1(t+1) = 8x_1(t) + 10x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = -2x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Scrivere tutti i comandi Matlab necessari per studiare la completa osservabilità del sistema.

Quale conclusione puoi trarre dal risultato ottenuto?

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$A = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$

```
>> A=[8 10; 0 -2]
>> c=[1 1]
>> det(obsv(A,c))
```

$\vartheta = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}$ $\det(\vartheta) = 0 \rightarrow$ NON C.O.