POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 6/9/2024

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

10	7	7	6	2		Voto totale 32

AVVERTENZE

<u>- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!
La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s) = \mu/s$, con $\mu > 0$. Il sistema di controllo

[1] È asintoticamente stabile solo per $\mu < 1$.
[2] È asintoticamente stabile per ogni $\mu > 0$, con margine di fase pari a 135°.
[3] È asintoticamente stabile per ogni $\mu > 0$, con margine di fase pari a 90°.
[4] È semplicemente stabile, poiché ha un polo nullo.

B) Il sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ $\left(0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}, \omega_n > 0\right)$ presenta una risonanza, cioè un massimo della funzione $|G(i\omega)|$. L'ascissa del massimo

[1] vale ω_n per ogni ξ
[2] tende a ω_n per $\xi \to 0$
[3] tende a ω_n per $\xi \to \sqrt{2}/2$
[4] è indipendente da ξ e ω_n

C) Il sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$ è sottoposto all'ingresso $u(t) = A\sin(2t + \pi)$. Per $t \to \infty$, l'uscita $y(t)$ tende alla funzione

[1] 0
[2] $B \neq 0$, con B opportuno
[3] $B\sin(t + \alpha)$, con B, α opportuni
[4] $B\cos(2t + \alpha)$, con B, α opportuni

D) Il sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$ è sottoposto all'ingresso $u(t) = sca(t)$. Per $t \to \infty$, l'uscita $y(t)$

[1] tende a zero
[2] tende a un valore costante diverso da zero
[3] diverge poiché il sistema è instabile
[4] oscilla senza convergere né divergere

E) Il sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$, di ordine $n = 2$, ha equilibrio $\bar{x} = 0$. Il movimento che parte dallo stato inziale $x(0) = |0.001 \quad 0.001|^T$ converge all'equilibrio ($x(t) \to 0$ per $t \to \infty$). Sulla base di queste sole informazioni

[1] si può affermare che l'equilibrio $\bar{x} = 0$ è asintoticamente stabile
[2] si può affermare che l'equilibrio $\bar{x} = 0$ è stabile ma non asintoticamente stabile
[3] si può affermare che l'equilibrio $\bar{x} = 0$ è instabile
[4] non si può affermare nulla sulla stabilità di $\bar{x} = 0$

A	B	C	D	E
3	2	4	1	4

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► **il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente**

F) Il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$, di ordine $n = 3$, ha un equilibrio $\bar{x}$ la cui matrice jacobiana ha autovalori $\left\{-0.5\,, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\,, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. In base a questa informazione

[1] l'equilibrio $\bar{x}$ è asintoticamente stabile
[2] l'equilibrio $\bar{x}$ è stabile ma non asintoticamente stabile
[3] l'equilibrio $\bar{x}$ è instabile
[4] non si può concludere nulla sulla stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$

G) Il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è esternamente stabile. Possiamo affermare che

[1] la parte raggiungibile del sistema è asintoticamente stabile
[2] la parte osservabile del sistema è asintoticamente stabile
[3] la parte raggiungibile e osservabile del sistema è asintoticamente stabile
[4] il sistema è asintoticamente stabile

H) Il sistema a tempo continuo con matrice di stato

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

[1] è asintoticamente stabile
[2] è semplicemente stabile
[3] è instabile
[4] non si può affermare nulla con l'informazione a disposizione

I) Si consideri il sistema a tempo continuo ("integratore") $\dot{x}(t) = u(t), y(t) = x(t)$.

[1] il movimento libero tende a zero da ogni stato iniziale
[2] il movimento forzato diverge per ogni funzione $u(t)$ non identicamente nulla
[3] il sistema è instabile poiché diverge per $\bar{u} > 0$
[4] il sistema è semplicemente stabile

L) La funzione di trasferimento $G(s)$ è di tipo g e ha grado relativo r. Il diagramma di Bode del modulo ha pendenza asintotica (in dB/dec)

[1] pari a $20r$ per $\omega \to 0$ e a $-20g$ per $\omega \to \infty$
[2] pari a $-20g$ per $\omega \to 0$ e a $20r$ per $\omega \to \infty$
[3] pari a $-20r$ per $\omega \to 0$ e a $-20g$ per $\omega \to \infty$
[4] pari a $-20g$ per $\omega \to 0$ e a $-20r$ per $\omega \to \infty$

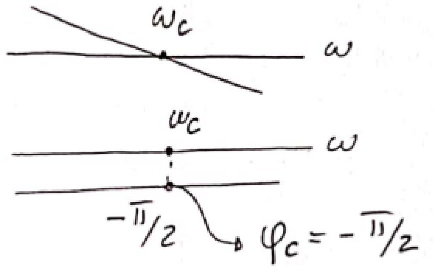
F	G	H	I	L
4	3	3	4	4

Giustificazioni (non richieste)

A) $|L|_{dB}$

$\angle L$

$(\mu > 0)$



$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi/2$

$|L|_{dB} \cap ! \; 0dB$
L propria
L non ha poli a $\mathrm{Re} > 0$
$\xrightarrow{\text{BODE}}$ $\mu > 0$, $\varphi_m > 0$ $\longrightarrow$ A.S $\rightsquigarrow$ [3]

B) Ascissa del massimo $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

$\omega_r \xrightarrow[\xi \to 0]{} \omega_n$ [2]

C) La pulsazione del segnale in uscita è pari alla pulsazione del segnale in ingresso [4]

D) $p_1 = -1$ $p_2 = -2$ $\mathrm{Re}(p_i) < 0 \; \forall i \to$ E.S. $y(t) \to y_\infty = G(0) = 0$ [1]

E) [4] Vedi le definizioni di equil stabile, asint. stab e instabile per i sistemi non lineari

F) $\lambda_1 = -0{,}5$ $\lambda_{2,3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|\lambda_1| < 1$ $|\lambda_{2,3}| = 1$

$|\lambda_i| \leq 1 \; \forall i$ $\exists j : |\lambda_j| = 1$ $\to$ non si può affermare nulla sulla stabilità di $\bar{x}$ nel sist. non lin [4]

G) (tc) E.S. $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(p_i) < 0 \; \forall i$
Gli autovalori della parte (R, θ) del sistema sono i poli $\to (R, \theta)$ è A.S. [3]

H) $tr(A) = 1 > 0 \rightsquigarrow$ INST $\quad$ (tc: $tr(A) > 0 \Rightarrow$ INST)

[3]

I) $\dot{x} = u \rightarrow \lambda = 0 \rightsquigarrow$ semplice stabilità [4]

L) $G = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\Pi(1+s\tau)}{\Pi(1+sT)}$

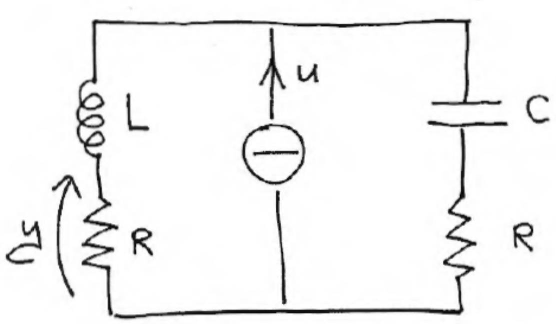
$\omega \to 0 \quad G \simeq \frac{\mu}{s^g} \rightsquigarrow$ pendenza $-20 \cdot g$ dB/dec

$\omega \to \infty$ si ha il solo contributo di r poli $\rightsquigarrow$ pendenza $-20r$ dB/dec

$\Rightarrow$ [4]

<u>Problema 2</u> <u>(7 punti)</u>

Si consideri la rete elettrica in figura (il simbolo al centro rappresenta un generatore di corrente).



a) Descrivere la rete elettrica mediante un sistema dinamico a tempo continuo di ordine opportuno, specificando le equazioni di stato e di uscita.

*(**<u>Attenzione</u>**: riportare in modo sintetico ma comprensibile le scelte fatte e i passaggi effettuati per arrivare alle equazioni finali del sistema dinamico.)*

Nel caso non si riesca a ottenere il sistema dinamico, proseguire comunque l'esercizio con queste matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix}$$

Per ogni $R, L, C > 0$:

b) Discutere la stabilità del sistema.

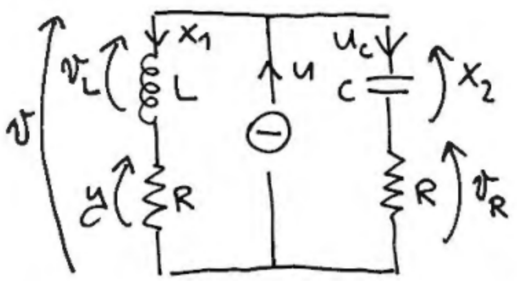
c) Discutere la presenza di oscillazioni nel movimento a ingresso costante.

d) Determinare il sottospazio di raggiungibilità.

e) Determinare il sottospazio di non osservabilità.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) Prendo x_1 = corrente in L, x_2 = tensione su C.



$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L} v_L = \frac{1}{L}\left(v - Rx_1\right) =$$

$$= \frac{1}{L}\left(\left[x_2 + v_R\right] - Rx_1\right) =$$

$$= \frac{1}{L}\left(x_2 + R\underbrace{\left(u - x_1\right)}_{u_c} - Rx_1\right)$$

$$= \frac{1}{L}\cdot\left(-2Rx_1 + x_2 + Ru\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left(u - x_1\right)$$

$$y = Rx_1$$

b) $\mathrm{tr}A = -\dfrac{2R}{L} < 0$ | t. continuo, $n=2$

$\det A = \dfrac{1}{LC} > 0$ | $\left.\begin{array}{l}\mathrm{tr}A<0\\ \det A>0\end{array}\right\} \Rightarrow$ A asint. stabile $\forall R, L, C > 0$

c) oscillazioni $\Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2$ complessi coniugati

$\Leftrightarrow$ discriminante < 0 nell'eq. caratteristica

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + (\det A) = \lambda^2 + \frac{2R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$$

oscillazioni $\Leftrightarrow \left(\dfrac{2R}{L}\right)^2 - 4\dfrac{1}{LC} < 0 \Leftrightarrow R^2 < \dfrac{L}{C}$

d) $$\tilde{R} = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R/L & -2\dfrac{R^2}{L^2} + \dfrac{1}{LC} \\ 1/C & -\dfrac{R}{LC} \end{vmatrix}$$

$$\det \tilde{R} = -\frac{R^2}{L^2C} + 2\frac{R^2}{L^2C} - \frac{1}{LC^2} = \frac{R^2}{L^2C} - \frac{1}{LC^2}$$

$$\det \tilde{R} = 0 \Leftrightarrow R^2 = \frac{L}{C}$$

* se $R^2 \neq \dfrac{L}{C}$, (A, b) compl. ragg $\Rightarrow X_R = \mathbb{R}^2$

* se $R^2 = \dfrac{L}{C}$, ricavo $C = \dfrac{L}{R^2}$ e sostituisco in $\tilde{R}$, che diventa:

$$\tilde{R} = \begin{vmatrix} \dfrac{R}{L} & -\dfrac{R^2}{L^2} \\ \dfrac{R^2}{L} & -\dfrac{R^3}{L^2} \end{vmatrix}$$, che ha $\det \tilde{R} = 0$ come previsto.

X_R è il sottosp. di dim$=1$ definito p.e. dalla 1ª colonna di $\tilde{R}$:

$$X_R = \mathrm{span}\left(\begin{vmatrix} R/L \\ R^2/L \end{vmatrix}\right) = \mathrm{span}\left(\begin{vmatrix} \alpha \\ R\alpha \end{vmatrix}\right)$$

e) $$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & 0 \\ -\dfrac{2R^2}{L} & \dfrac{R}{L} \end{vmatrix}$$

$\det \mathcal{O} = \dfrac{R^2}{L} \neq 0 \quad \forall R, L > 0 \Rightarrow (A, c)$ compl. osservab.

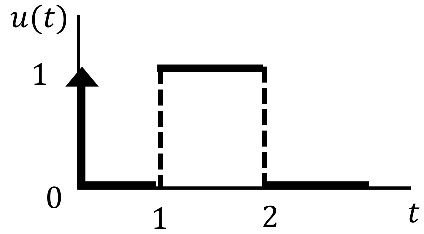
$\Rightarrow X_{NO} = \{0\}$

Problema 3 (7 punti)

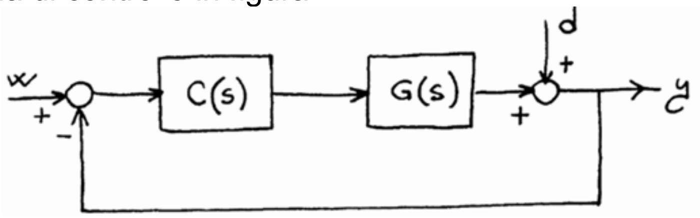
Si consideri il sistema caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = 100\frac{(1-s)(1+10s)}{(10+s)^3}$$

a) Determinare qualitativamente e tracciare graficamente l'andamento di $y(t)$ quando l'ingresso $u(t)$ è quello rappresentato in figura (la freccia indica un impulso unitario). Dopo quanto tempo l'uscita sarà andata a regime?



Si consideri ora il sistema di controllo in figura



b) Determinare un controllore $C(s)$, con esattamente 1 polo, tale che:

- il sistema di controllo sia asintoticamente stabile;
- l'errore a transitorio esaurito dovuto a riferimento e disturbo costanti sia nullo;
- il tempo di risposta sia (approssimativamente) pari a 5000 unità di tempo.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $G(s) = 100 \dfrac{(1-s)(1+10s)}{(10+s)^3}$

Risposta a scalino

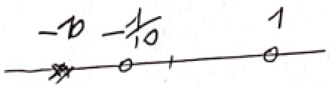
$p_i = -10 \quad \forall i \qquad p_i \in \mathbb{R} \to \nexists$ osall

$T_D = \frac{1}{10} \qquad T_R = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$y_\infty = G(0) = \frac{100}{10^3} = \frac{1}{10}$

$r = 3-2 = 1 \to y(0) = 0, \ \dot{y}(0) = 100 \frac{(-10)}{1} = -1000$

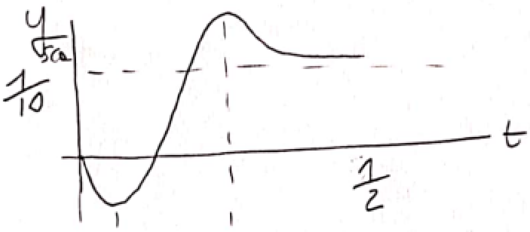
zeri in 1 e $-\frac{1}{10}$



$m_s = 2 \qquad \sigma = 0$

$m_s \le N \le m_s + \sigma$

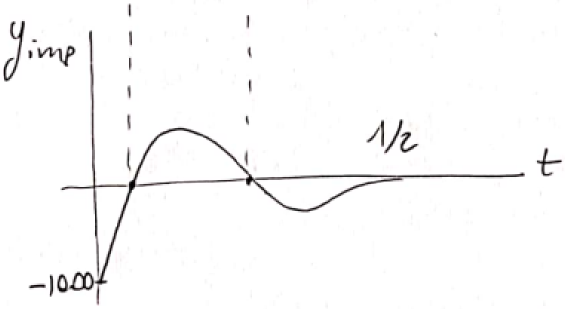
$N = 2$



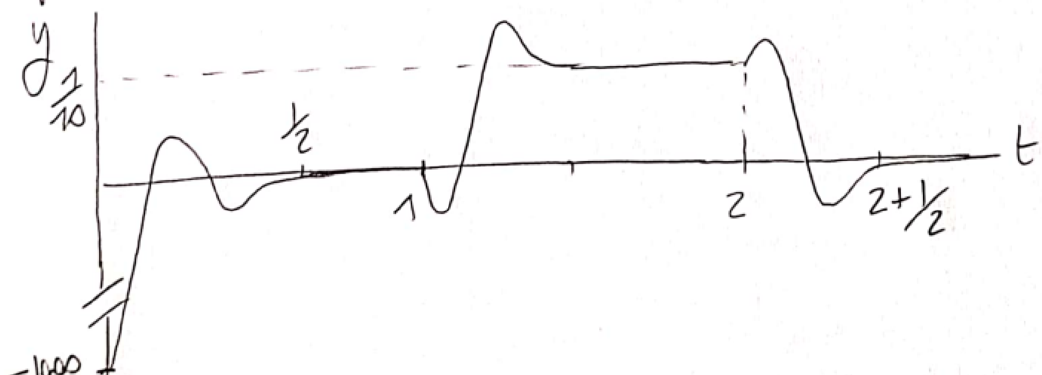
Risposta a impulso

$y_{sca}(0) = 0 \to y_{imp}(t) = \dfrac{d y_{sca}(t)}{dt}$

$y_{imp}(0) = \dot{y}_{sca}(0) = -1000$



Risposta a $u(t) = imp(t) + sca(t-1) - sca(t-2)$



$T_R^{TOT} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

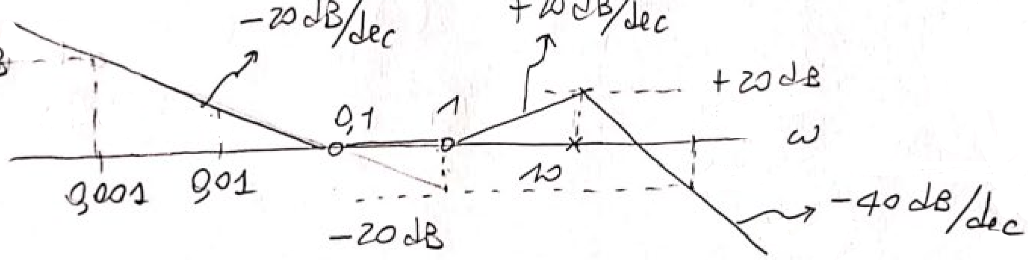
b) $e_\infty = 0 \Rightarrow L = CG$ di tipo $>0 \rightsquigarrow$ almeno 1 polo nell'origine

$\Rightarrow C = \frac{\mu}{s}$

$$L = \frac{\mu}{s} \cdot 100 \, \frac{(1-s)(1+10s)}{(10+s)^3} = \frac{\mu}{s} \, \frac{100}{10^3} \, \frac{(1-s)(1+10s)}{(1+0{,}1s)^3}$$

$$L = 0{,}1 \frac{\mu}{s} \, \frac{(1-s)(1+10s)}{(1+0{,}1s)^3}$$

$\mu = 1$

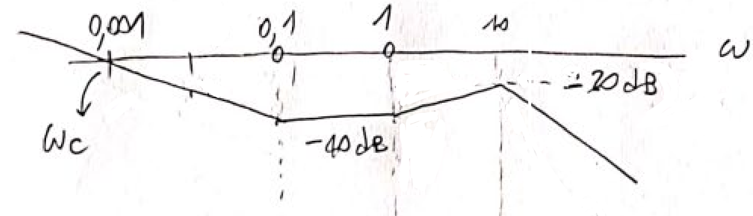


$T_R = \frac{5}{\omega_c} = 5000 \rightarrow \omega_c = 0{,}001$

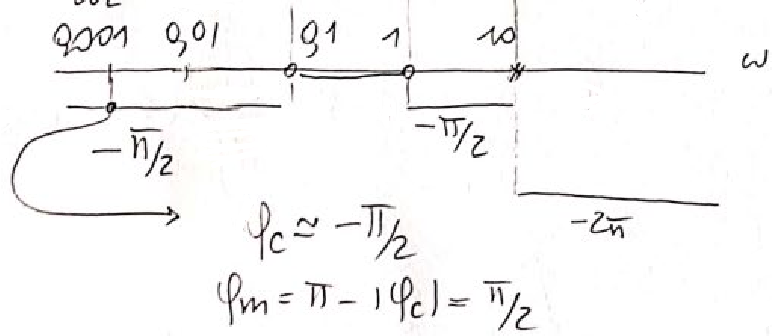
Devo abbassare $|L|_{dB}$ di 40 dB $\Rightarrow \mu = 0{,}01$ $\quad C = \frac{0{,}01}{s}$

$$L = \frac{0{,}001}{s} \, \frac{(1-s)(1+10s)}{(1+0{,}1s)^3}$$

$|L|_{dB}$



$\measuredangle L$



$\varphi_c \simeq -\pi/2$

$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi/2$

$|L|_{dB} \cap ! \, 0 dB$
L non ha poli a $\mathrm{Re} > 0$
L propria

$\xrightarrow{\text{BODE}}$ $\mu = 0{,}001 > 0$, $\varphi_m = \pi/2 > 0$ $\longrightarrow$ A.S.

Problema 4 (6 punti)

Si enunci il criterio di stabilità (basato sugli autovalori) per i sistemi a tempo continuo.

Si propongano quindi un sistema lineare a tempo continuo di ordine $n = 3$ semplicemente stabile e uno debolmente instabile *(motivare in modo chiaro ed esauriente)*.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Criterio di stabilità a tempo continuo

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i \iff A$ è A.S.

$\exists i \,/\, \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow A$ è INST. (forte)

$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \ \forall i, \ \exists i \,/\, \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$

- se $b_i = 1 \ \forall i \,/\, \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0 \iff$ S.S.
  (autovalore regolare)
- se $b_i > 1$ per almeno un $i \,/\, \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0 \Rightarrow$ INST (debole)
  (autovalore non regolare)

tc $n = 3$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 - 1$

$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \ \forall i$

$\exists i / \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$

$a_1 = 1 \rightarrow b_1 = 1$

$\hookrightarrow$ S.S.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -1$

$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0 \ \forall i$

$\exists i / \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$

A è in forma canonica di Jordan; il blocco relativo all'autovalore 0 è composto da un miniblocco di ordine 2 $\rightarrow b_1 = 2 \Rightarrow$ INST (debole)

Problema 5 (2 punti)

Illustrare tutti i comandi Matlab per simulare l'andamento dell'uscita del sistema dinamico

$$x_1(t+1) = -x_1(t) + x_3(t) - u(t)$$
$$x_2(t+1) = -0.5x_2(t) + x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.3x_1(t) + x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_2(t) + x_3(t) + u(t)$$

partendo dalla condizione iniziale $x(0) = [-1 \quad 0 \quad 1]^T$, su un orizzonte di $T = 10$ unità di tempo, con ingresso costante $u = 3$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

```
A=[-1 0 1 ; 0 -0.5 1 ; 0.3 1 0]
b=[-1 0 1]'
c=[0 1 1]
d=1
sistema = ss(A,b,c,d,1)
x0=[-1 0 1]'
T=[0:10]
u=3*ones(size(T))
lsim(sistema,u,T,x0)
```

il sistema è a tempo discreto