POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 12/7/2024

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

10	7	7	6	2

Voto totale
32

AVVERTENZE

<u>- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!
La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Un sistema lineare a tempo continuo ha funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n}$$

[1] Se $\alpha_i \geq 0$ per ogni i allora il sistema è asintoticamente stabile
[2] Se $\alpha_i > 0$ per ogni i allora il sistema è asintoticamente stabile
[3] Se il sistema è asintoticamente stabile allora $\alpha_i > 0$ per ogni i
[4] Se il sistema è asintoticamente stabile allora $\alpha_i \geq 0$ per ogni i

B) Dato il sistema lineare (A, b, c, d) di ordine n, la sua funzione di trasferimento

[1] ha sempre denominatore di grado n
[2] ha sempre numeratore e denominatore di grado n
[3] ha sempre numeratore e denominatore di grado minore o uguale a n
[4] ha sempre numeratore e denominatore di grado identico

C) Il sistema lineare (A, b, c, d) con $b \neq 0$, sottoposto a ingresso costante $u(t) = \bar{u} \neq 0\ \forall t \geq 0$

[1] se ha un solo equilibrio $\bar{x}$, allora è asintoticamente stabile
[2] se è asintoticamente stabile, allora ha un solo equilibrio $\bar{x}$
[3] se ha l'equilibrio $\bar{x} = 0$, allora è asintoticamente stabile
[4] se è asintoticamente stabile, allora ha l'equilibrio $\bar{x} = 0$

D) Il sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$, di ordine $n = 2$, ha equilibrio $\bar{x} = 0$. Il movimento che parte dallo stato inziale $x(0) = |0.001 \quad 0.001|^T$ diverge ($\|x(t)\| \to \infty$ per $t \to \infty$). Sulla base di queste sole informazioni

[1] si può affermare che l'equilibrio $\bar{x} = 0$ è asintoticamente stabile
[2] si può affermare che l'equilibrio $\bar{x} = 0$ è stabile ma non asintoticamente stabile
[3] si può affermare che l'equilibrio $\bar{x} = 0$ è instabile
[4] non si può affermare nulla sulla stabilità di $\bar{x} = 0$

E) La matrice di stato A del sistema $\dot{x} = Ax$ ha polinomio caratteristico $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 10$. Il movimento

[1] diverge con oscillazioni
[2] tende a zero senza oscillazioni
[3] tende a zero con oscillazioni
[4] tende a un valore costante non nullo con oscillazioni

A	B	C	D	E
3	3	2	4	3

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► **il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente**

F) È dato il sistema lineare a tempo continuo definito da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 1]$$

[1] Il sistema è rivelabile.
[2] Il sistema è asintoticamente stabile.
[3] Il sistema non è completamente raggiungibile.
[4] Il sistema è semplicemente stabile.

G) La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare a tempo continuo

[1] è la trasformata di Laplace della risposta allo scalino
[2] è la trasformata di Laplace della derivata della risposta all'impulso
[3] è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso
[4] è la trasformata di Laplace dell'integrale della risposta allo scalino

H) La risposta allo scalino $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+2)}$$

è caratterizzata da

[1] $y(0) = 10$
[2] $y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 10$
[3] $y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 10$
[4] $y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ \ddot{y}(0) = 10$

I) La risposta in frequenza del sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10s}{(s+1)(s+2)}$$

per $\omega \to \infty$

[1] ha modulo che tende a 10 e fase che tende a $-\pi/2$
[2] ha modulo che tende a 0 e fase che tende a $-\pi/2$
[3] ha modulo che tende a 0 e fase che tende a $-\pi$
[4] ha modulo che tende a 0 e fase che tende a 0

L) Per il sistema con funzione di trasferimento d'anello $L(s) = \frac{\mu}{(1+0.1s)(1+s)}$ con $\mu > 0$, il modulo dell'errore a regime $\bar{e}$ dovuto a disturbo additivo in uscita $d(t) = \bar{d}$ costante

[1] cresce al crescere di μ
[2] decresce al crescere di μ
[3] vale $\bar{e} = 0$ indipendentemente da μ
[4] vale $\bar{e} \neq 0$ indipendentemente da μ

F	G	H	I	L
1	3	3	2	2

GIUSTIFICAZIONI (NON RICHIESTE)

A) Teorema (t.c.) $A.S. \Rightarrow \alpha_i > 0 \ \forall i$ $\leadsto [3]$

B) $G = c(sI-A)^{-1}b + d = \dfrac{\text{polinomio di grado} \le n}{\Delta_A(s)}$ + eventuali semplificazioni $\leadsto [3]$

polinomio di grado n

C) Teorema: $A.S. \Leftrightarrow \begin{cases} \exists!\, \bar{x} \\ x(t) \to \bar{x} \quad \forall x(0) \end{cases}$ $\leadsto [2]$

D) Per la def. di stabilità/asint. stab./instabilità di un equilibrio $\bar{x}$ in SNL $\leadsto [4]$

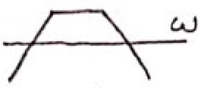
E) t.c. $n=2$ $\quad \alpha_i > 0 \to A.S.$ $\quad x_L(t) = x(t) \to 0$ $\quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \leadsto$ con oscillazioni $\leadsto [3]$

F) $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ $\det \mathcal{O} \neq 0 \to$ C.O. $\to$ Rivelabile $\leadsto [1]$

G) $g(t) = c e^{At} b \quad \mathcal{L}[g(t)] = c(sI-A)^{-1}b = G(s)$ $\leadsto [3]$

H) $r = 1 \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) \neq 0$ $\leadsto [3]$

I) $|G|_{dB}$

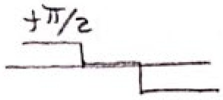


ω

$|G|_{dB} \to -\infty$

$|G| \to 0$

$\measuredangle G$ $+\pi/2$



$-\pi/2$

$\measuredangle G \to -\pi/2$

$\leadsto [2]$

L) $h = 0 \quad \bar{e} = -\dfrac{1}{1+\mu}\,\bar{d}$

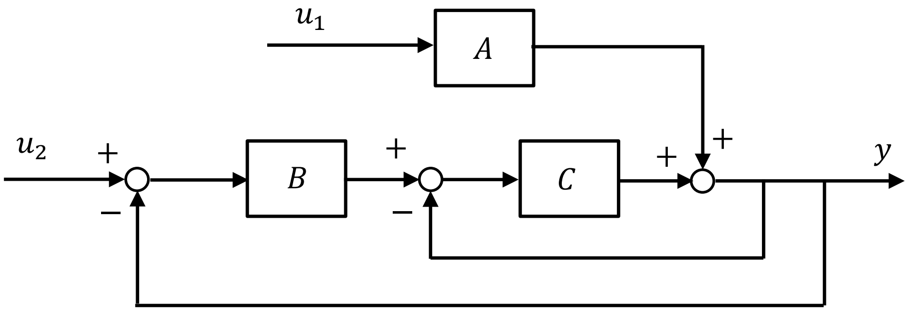
$|\bar{e}|$

μ

$\leadsto [2]$

Problema 2 (7 punti)

Si consideri il sistema in figura



Il blocco A è definito dal modello ingresso/uscita

$$\ddot{y}_A + 11\dot{y}_A + 10y_A = \dot{u}_A$$

mentre i blocchi B e C sono definiti dalle funzioni di trasferimento

$$B = \frac{12}{s-1} \qquad\qquad C = \frac{1}{s+6}$$

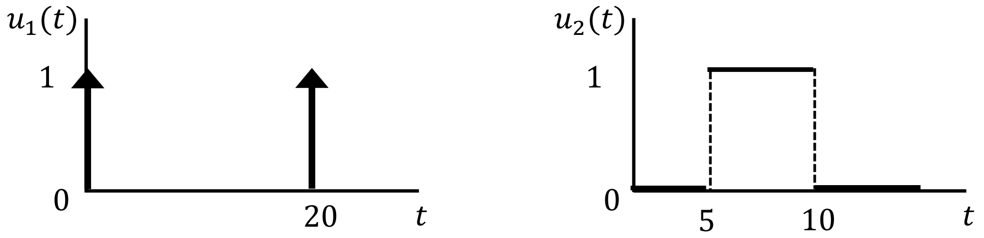
a) Dimostrare che le funzioni di trasferimento tra u_1 e y e tra u_2 e y valgono, rispettivamente,

$$G_1 = \frac{A}{1+BC+C} \qquad\qquad G_2 = \frac{BC}{1+BC+C}$$

(nel caso non si riesca a dimostrarlo, proseguire comunque l'esercizio con queste funzioni di trasferimento)

b) Studiare la stabilità esterna di G_1 e G_2.

c) Determinare qualitativamente, e rappresentare graficamente, l'uscita complessiva del sistema quando i due ingressi sono quelli rappresentati in figura



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$A = \frac{s}{s^2+11s+10} = \frac{s}{(s+10)(s+1)}$$

a) $y = A u_1 + C\left[B(u_2 - y) - y\right]$

$(1+C+CB)y = A u_1 + BC u_2$

$$y = \frac{A}{1+BC+C} u_1 + \frac{BC}{1+BC+C} u_2$$

$$u_1 \to y \qquad G_1 = \frac{A}{1+BC+C} = \frac{\frac{s}{(s+10)(s+1)}}{1 + \frac{12}{(s-1)(s+6)} + \frac{1}{s+6}}$$

$$\rightsquigarrow G_1 = \frac{s(s-1)(s+6)}{(s+10)(s+5)(s+1)^2}$$

$u_2 \to y \qquad G_2 = \dfrac{BC}{1+BC+C} = \dfrac{12}{(s+5)(s+1)}$

b) $G_1: \; p_1 = -10, \; p_2 = -5, \; p_3 = p_4 = -1$

$\mathrm{Re}(p_i) < 0 \;\; \forall i \Rightarrow$ E.S.

$G_2: \; p_1 = -5, \; p_2 = -1$

$\mathrm{Re}(p_i) < 0 \;\; \forall i \Rightarrow$ E.S.

c) Calcoliamo prima la risposta allo scalino di G_1, poi otterremo la risposta all'impulso per derivazione (poichè $y_{sca}(0) = 0$)

Risposta a impulso di G_1

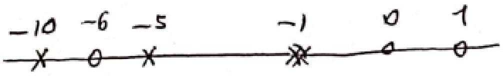
$r = 1 \quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 1 > 0$

$p_i \in \mathbb{R} \to \nexists$ osall $\quad p_D = -1 \quad T_R = 5$

$y_{sca}^{\infty} = G_1(0) = 0$

G_1 propria

zeri/poli $\in \mathbb{R}$



$m_s = 2$

$\delta = 0$

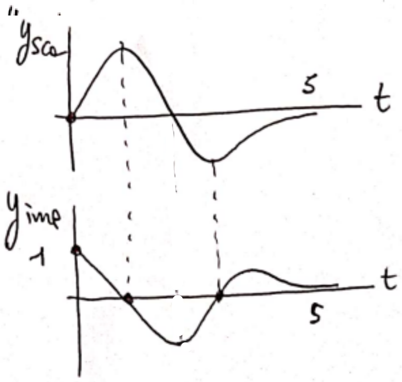
$N = 2$

$y_{sca}(0) = 0 \to y_{imp} = \dfrac{dy_{sca}}{dt}$

$y_{imp}(0) = \dot{y}_{sca}(0) = 1$

$\dot{y}_{sca} = 0 \to y_{imp} = 0$

$y_{imp}^{\infty} = 0$



Risposta a scalino di G_2

$r = 2$

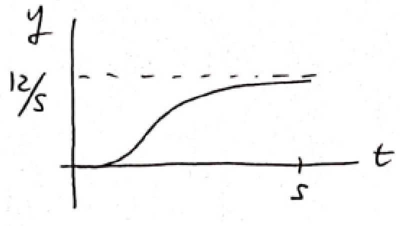
$y(0) = \dot{y}(0) = 0$

$\ddot{y}(0) = 12 > 0$

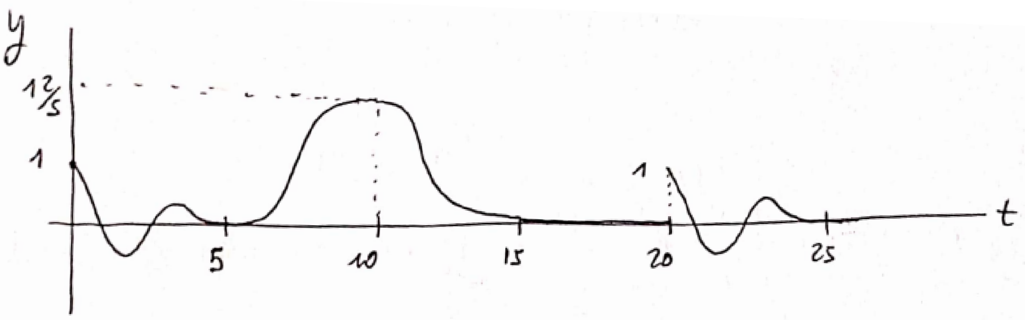
$\nexists$ osall $\quad T_R = 5$

$m_s = \delta = 0 \quad N = 0$

$y_{\infty} = G_2(0) = 12/5$



Risposta complessiva $\left(u_1(t) = \mathrm{imp}(t) - \mathrm{imp}(t-20) \text{ e } \right.$
$\left. u_2(t) = \mathrm{sca}(t-5) - \mathrm{sca}(t-10)\right)$



Problema 3 (7 punti)

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

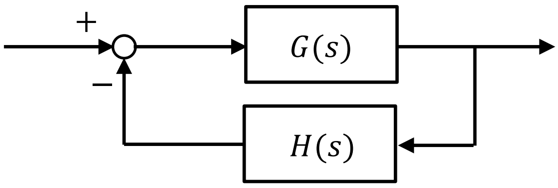
$$\dot{x}_1 = x_1 + (1+p)x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = p x_1 - 5x_2$$
$$y = x_1$$

a) Discutere la stabilità interna (asintotica) per ogni $p \in \mathbb{R}$.

b) Discutere la stabilità esterna per ogni $p \in \mathbb{R}$ (*suggerimento: valutare possibili semplificazioni della funzione di trasferimento)*.

c) Discutere la completa raggiungibilità e la completa osservabilità per ogni $p \in \mathbb{R}$.

d) Discutere per ogni $p \in \mathbb{R}$ la stabilità asintotica del sistema rappresentato in figura



in cui $G(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento del sistema assegnato e $H(s)$ la funzione di trasferimento di un integratore.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 1+p \\ p & -5 \end{vmatrix}$ $\quad t_c,\ n=2$

$tr(A) = -4 < 0$

$det(A) = -5 - p - p^2 = -(p^2+p+5) < 0 \quad \forall p \longmapsto$ INST $\forall p$

b) $\dot{x}_1 = x_1 + (1+p)x_2 + u$ $\quad$ $\dot{x}_2 = p x_1 - 5x_2$ $\quad$ $y = x_1$ $\quad \rightarrow \quad$ $(s-1)x_1 = (1+p)x_2 + u$ $\quad$ $(s+5)x_2 = p x_1$ $\quad$ $y = x_1$ $\quad \rightarrow \quad G = \dfrac{s+5}{s^2+4s-(p^2+p+5)}$

$s^2 + 4s - (p^2+p+5)\Big|_{s=-5} = 0 \Rightarrow \cancel{25} - \cancel{20} - p - p^2 - \cancel{5} = 0 \quad \begin{cases} p = 0 \\ p = -1 \end{cases}$ $\rightarrow$ Sono i valori di p per cui si ha semplificazione NUM/DEN in G

- $p \neq 0 \vee p \neq -1$
  $\nexists$ semplificazioni NUM/DEN in G $\rightarrow \{poli\} = \{\lambda\} \rightarrow$ NON ES
- $p = 0$ oppure $p = -1$
  $\exists$ semplificazioni NUM/DEN

$G = \dfrac{s+5}{s^2+4s-5} = \dfrac{s+5}{(s+5)(s-1)} = \dfrac{1}{s-1} \rightarrow$ polo $= 1 \rightarrow$ NON ES

$\rightarrow$ NON ES $\forall p$

c) • $p \neq 0 \vee p \neq -1$ $\nexists$ semplificazioni $\Rightarrow$ CR e CO

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -5$

• $p = 0$ $\quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = b$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$

$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \det(R) = 0$ NON CR

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \det(\mathcal{O}) \neq 0$ CO

• $p = -1$ $\quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = b$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$

$R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \det(R) \neq 0$ CR

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad \det(\mathcal{O}) = 0$ NON CO

d) $G(s) = \dfrac{s+5}{s^2 + 4s - (p^2 + p + 5)}$ $\qquad H(s) = \dfrac{1}{s}$

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{s(s+5)}{s^3 + 4s^2 + s(-p^2 - p - 4) + 5}$$

$d_2 = -(p^2 + p + 4) < 0 \ \forall p$

$\Downarrow$

NON A.S. $\forall p$

Problema 4 (6 punti)

Dato il sistema non lineare $\dot{x}(t) = f(x(t))$ e un suo equilibrio $\bar{x}$, definire la matrice Jacobiana J del sistema in $\bar{x}$ e illustrare quali conclusioni è possibile trarre sulla stabilità di $\bar{x}$ dall'analisi di J (metodo di linearizzazione).

Proporre quindi un esempio di un sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ non lineare, di ordine 1, dotato di un equilibrio $\bar{x}$ instabile, dimostrandone l'instabilità mediante il metodo discusso in precedenza.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$\underset{(n \times n)}{J(\bar{x})} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right|_{x = \bar{x}}$$

$J(\bar{x})$ asintoticamente stabile $\Rightarrow$ $\bar{x}$ asintoticamente stabile
$(\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i)$

$J(\bar{x})$ fortemente instabile $\Rightarrow$ $\bar{x}$ instabile
$(\exists \lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0)$

Esempio: $\dot{x} = x(1-x)$, $\bar{x} = 0$ è equilibrio

$J(x) = 1 - 2x$

$J(0) = 1 - 2x \Big|_{x=0} = 1$

$J(0)$ fortemente instabile $\Rightarrow$ $\bar{x} = 0$ instabile

Problema 5 (2 punti)

In Matlab si vogliono tracciare i diagrammi di Bode del sistema lineare

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_3$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$
$$\dot{x}_3 = x_1 - 2x_3$$
$$y = x_2$$

Qual è la sequenza di comandi da digitare?

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = |0 \quad 1 \quad 0|$$

```
A=[-1 0 1; 0 -1 0; 1 0 -2]
b=[0 1 0]'
c=[0 1 0]
d=0
sistema =ss(A,b,c,d)
bode (sistema)
```