POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 19/6/2024

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

10	7	7	6	2		Voto totale 32

AVVERTENZE

<u>- Non è permesso consultare alcun tipo di materiale (libri, appunti, smartphone/watch, ecc.).</u>

- Ogni risposta deve essere **motivata** (ad eccezione del **Problema 1**).
- Oltre alla pertinenza e completezza della risposta, sono valutati anche **ordine, chiarezza e rigore formale**.
- Le soluzioni devono essere riportate **solo sui fogli allegati.**

Problema 1 (10 punti)

ATTENZIONE!
La prova d'esame è INSUFFICIENTE se si totalizzano meno di 6 punti nel Problema 1.

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica) riportandone il numero nella casella a fondo pagina. Non è richiesta giustificazione (risposta esatta = +1, risposta errata o non data = 0)

A) Un sistema lineare (A, b, c, d) a tempo continuo con ingresso nullo ha stato iniziale $x(0) = -2$. Per $t > 0$

[1] il movimento libero è nullo e quello forzato è non nullo
[2] il movimento libero è non nullo e quello forzato è nullo
[3] il movimento libero e quello forzato sono entrambi nulli
[4] il movimento libero e quello forzato sono entrambi non nulli

B) Il guadagno μ di un sistema lineare a tempo discreto, asintoticamente stabile, vale

[1] $G(0)$
[2] $-cA^{-1}b + d$
[3] $G(z)$
[4] $c(I - A)^{-1}b + d$

C) In un sistema lineare asintoticamente stabile, il movimento libero

[1] può divergere da alcuni stati iniziali
[2] tende a un valore costante (non nullo) da ogni stato iniziale
[3] tende a zero da qualunque stato iniziale
[4] da alcuni stati iniziali ha oscillazioni di ampiezza costante attorno a zero

D) La matrice di stato A del sistema $\dot{x} = Ax$ ha autovalori $\{-2 + i, -2 - i, -1, 0, 2i, -2i\}$. Il sistema è

[1] asintoticamente stabile
[2] semplicemente stabile
[3] debolmente (polinomialmente) instabile
[4] fortemente (esponenzialmente) instabile

E) Il sistema S, asintoticamente stabile, è formato collegando in parallelo i due sistemi S_1 e S_2. Senza altre informazioni, si può affermare che

[1] S_1 e S_2 sono entrambi asintoticamente stabili
[2] uno e uno solo tra S_1 e S_2 è asintoticamente stabile
[3] uno e uno solo tra S_1 e S_2 è instabile
[4] non si può affermare nulla sulla stabilità di S_1 e S_2

A	B	C	D	E
2	4	3	2	1

Il Problema 1 prosegue nella pagina seguente ►

► il Problema 1 prosegue dalla pagina precedente

F) Il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$ ha un equilibrio il cui Jacobiano ha autovalori $\{1, -1, -2\}$. L'equilibrio

[1] è stabile ma non asintoticamente stabile
[2] è asintoticamente stabile
[3] è instabile
[4] non è possibile discutere la stabilità con l'informazione disponibile

G) Il sistema (A, b, c, d), esternamente stabile, è sottoposto a ingresso $u(t)$ sinusoidale. Senza altre informazioni, si può affermare che l'uscita $y(t)$

[1] diverge per ogni stato iniziale
[2] diverge almeno per $x(0) = 0$
[3] è limitata per ogni stato iniziale
[4] è limitata almeno per $x(0) = 0$

H) La risposta allo scalino del sistema con funzione di trasferimento $G(s) = 10s/((s+1)(s+2))$ è la seguente

[1] $10 + 10e^{-t} - 10e^{-2t}$
[2] $10 + 10e^{t} - 10e^{2t}$
[3] $10e^{-t} - 10e^{-2t}$
[4] $10e^{t} - 10e^{2t}$

I) Il sistema con funzione di trasferimento $G(s) = 10s/((s+1)(s+2))$ si comporta da filtro

[1] passa basso
[2] passa alto
[3] passa banda
[4] elimina banda

L) Per il sistema con funzione di trasferimento d'anello $L(s) = 10s/((s+1)(s+2))$, il criterio di Bode

[1] è applicabile e stabilisce che il sistema di controllo è asintoticamente stabile
[2] è applicabile e stabilisce che il sistema di controllo è semplicemente stabile
[3] è applicabile e stabilisce che il sistema di controllo è instabile
[4] non è applicabile

F	G	H	I	L
3	4	3	3	4

GIUSTIFICAZIONI (NON RICHIESTE)

A) $x(t) = x_L(t) + x_F(t) = \underbrace{e^{at}x(0)}_{x_L(t) \neq 0} + \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)} b\, u(\tau)\, d\tau}_{x_F(t) = 0 \text{ essendo } u(\cdot) = 0}$

[2]

B) t.d. $\bar{x} = A\bar{x} + b\bar{u}$

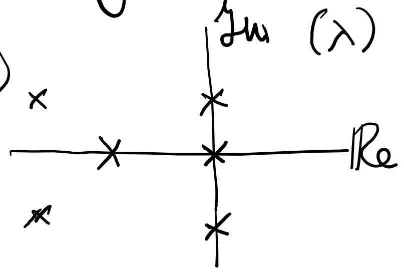
$A.S. \rightarrow \exists!\ \bar{x} = (I-A)^{-1} b\bar{u}$

$\bar{y} = c\bar{x} + d\bar{u} = [c(I-A)^{-1}b + d]\bar{u}$

$\mu = \bar{y}/\bar{u} = c(I-A)^{-1}b + d$ [4]

C) Def di asintotica stabilità [3]

D)



$\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0\ \forall i$ + tutti i $\lambda_j / \mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ sono radici semplici di $\psi(\lambda)$

$\Downarrow$

semplice stabilità [2]

E) $\{\lambda\}_S = \{\lambda\}_{S_1} \cup \{\lambda\}_{S_2}$

$S\ A.S. \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_S) < 0$

$\rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_{S_1}) < 0 \rightarrow S_1$ A.S.

$\rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_{S_2}) < 0 \rightarrow S_2$ A.S.

[1]

F) $\exists\ \lambda_i / |\lambda_i| > 1 \rightarrow$ INST [3]

G) Per def. di E.S.: $y_F(t)$ limitata per $u(t)$ limitato

$\hookrightarrow x(0) = 0$

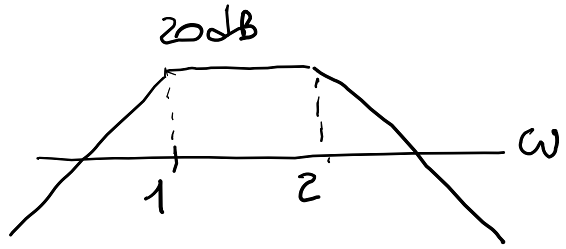
[4]

H) $y_\infty = G(0) = 0$ (escluso [1] e [2] per le quali $y \to \infty$)

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2 \rightsquigarrow$ compaiono i modi e^{-t}, e^{-2t}

[3]

I) $|G|_{dB}$



Passa-banda

[3]

L) $|L|_{dB} \nearrow$

Non applicabile perché ω_c non è univocamente definita $\rightsquigarrow |L(i\omega_c)|_{dB} = 0\,dB$

[4]

Problema 2 (7 punti)

Un'azienda di credito concede Prestiti di durata Annuale ("formula PA") o Biennale ("formula PB"). All'inizio di ogni anno t vengono erogati nuovi prestiti per un ammontare complessivo pari a $u(t)$ euro, di cui 2/3 con "formula PA" e 1/3 con "formula PB": entrambe le categorie di prestiti sono soggette a un tasso di interesse annuo pari a $r > 0$, interesse che viene riscosso a cadenza annuale – quindi alla fine del prestito per "formula PA", a metà e alla fine per "formula PB".

a) Descrivere l'evoluzione dei prestiti erogati mediante un sistema dinamico a tempo discreto, definendo come variabile di uscita $y(t)$ l'ammontare complessivo di interessi riscosso all'istante t (*specificare con precisione il significato delle variabili di stato adottate*). Specificare le matrici (A, b, c, d) del sistema.

b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

c) Determinare la funzione di trasferimento del sistema e il suo guadagno.

d) Discutere se, partendo da $x(0) = 0$, è possibile portare il sistema agendo su $u(t)$ in uno stato x in cui tutte le variabili hanno lo stesso valore ($x_1 = x_2 = \cdots = x_n$).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_1(t)$ = tot prestiti in "Formula PA" da 1 anno
$x_2(t)$ = " " " "formula PB" da 1 anno
$x_3(t)$ = " " " "formula PB" da 2 anni

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{2}{3}u(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{3}u(t) \\ x_3(t+1) = x_2(t) \end{cases} \qquad A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = r(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)) \qquad c = \begin{vmatrix} r & r & r \end{vmatrix} \quad d = 0$$

b) $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, 3$
$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow A$ asintoticamente stabile
sistema a memoria finita : $T_R \leq n = 3$
$\nexists \ \lambda_i$ complessi o reali negativi $\Rightarrow$ no oscillazioni

c) $zx_1 = \frac{2}{3}u$
$zx_2 = \frac{1}{3}u$
$zx_3 = x_2$
$y = r(x_1 + x_2 + x_3)$

$$\Rightarrow y = G(z)u = \frac{rz + \frac{1}{3}r}{z^2}u$$

$$\mu = G(1) = \frac{4}{3}r$$

d) Lo stato richiesto deve appartenere al sottospazio di raggiungibilità X_R.

$$R = \begin{vmatrix} b & Ab & A^2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix} \qquad X_R = \text{span}\left(\begin{vmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{vmatrix} \right)$$

$x = \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ non è scrivibile come comb. lineare $A \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{vmatrix} + B \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{vmatrix}$,

per cui la risposta è negativa.

Problema 3 (7 punti)

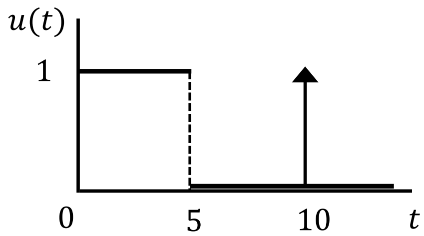
Un'apparecchiatura è sottoposta a prove sperimentali allo scopo di ricavarne la funzione di trasferimento $G(s)$.
Applicando vari ingressi sinusoidali $u(t) = Usin(\omega t)$ di ampiezza U e pulsazione ω, si è rilevata l'ampiezza dell'uscita a transitorio esaurito $y(t) = Ysin(\omega t + \varphi)$:

ω	0.01	10	1000	10000
U	0.1	1	0.01	10
Y	1	100	0.01	0.1

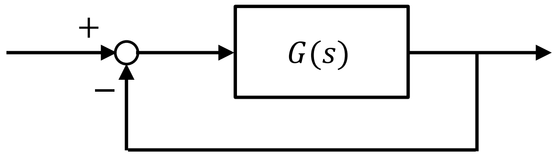
Si è inoltre rilevato che lo sfasamento φ tende a -2π per $\omega \to \infty$.
Applicando inoltre un ingresso costante $\bar{u}$, l'uscita tende a un valore costante $\bar{y} = 10\bar{u}$ per qualunque $\bar{u}$.

a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con i risultati delle prove sperimentali.

b) Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta di $G(s)$ alla funzione di ingresso in figura (il simbolo in $t = 10$ rappresenta un impulso).



c) Discutere la stabilità del sistema rappresentato in figura.

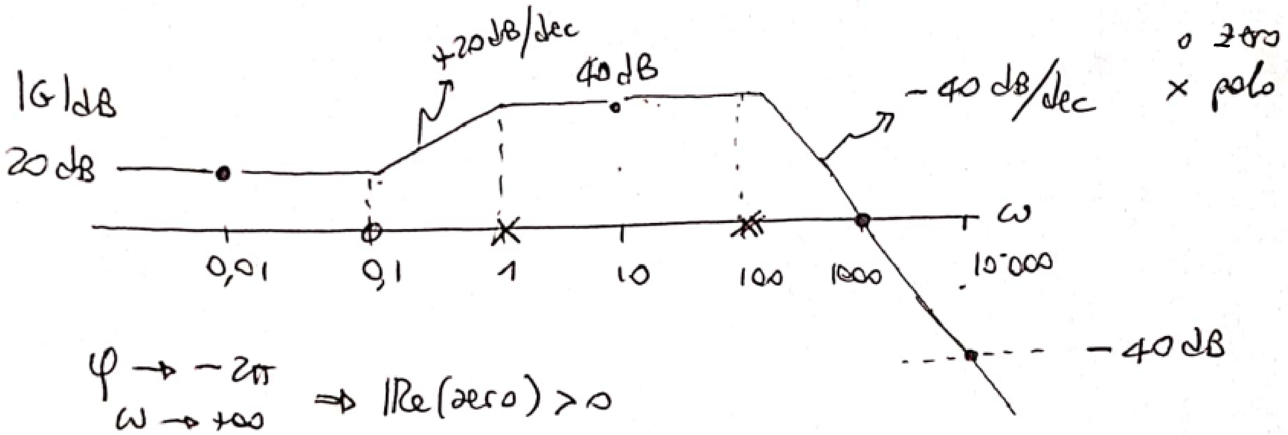


Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)

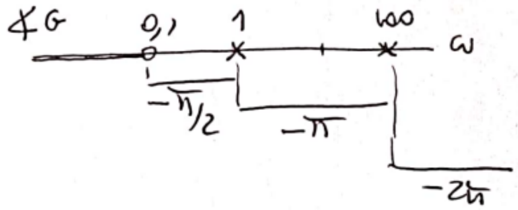
ω	0,01	10	1000	10'000
$\lvert G(i\omega)\rvert = \frac{Y}{U}$	10	100	1	0,01
$\lvert G(i\omega)\rvert_{dB}$	20	40	0	−40

$$\frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 10 = G(0) = \mu$$

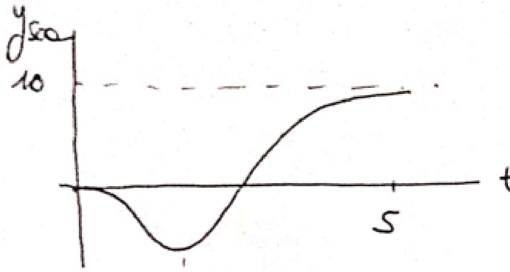


$$\varphi \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} -2\pi \Rightarrow \mathrm{Re}(\text{zero}) > 0$$

$$G(s) = 10\,\frac{1-10s}{(1+s)(1+0{,}01s)^2}$$



b) Risposta a scalino

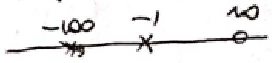


$r=2$ $\quad y(0)=\dot y(0)=0 \quad \ddot y(0)<0$

$p_D=-1 \quad T_R=5$

$p_i \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists$ oscill

G propria, poli/zeri $\in \mathbb{R}$

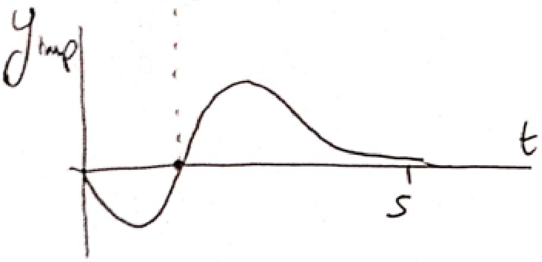


$m_s=1$ $\quad N=1$

$\sigma=0$

$y_\infty = G(0) = 10$

Risposta a impulso



$y_{sca}(0)=0 \rightarrow y_{imp} = \dfrac{dy_{sca}}{dt}$

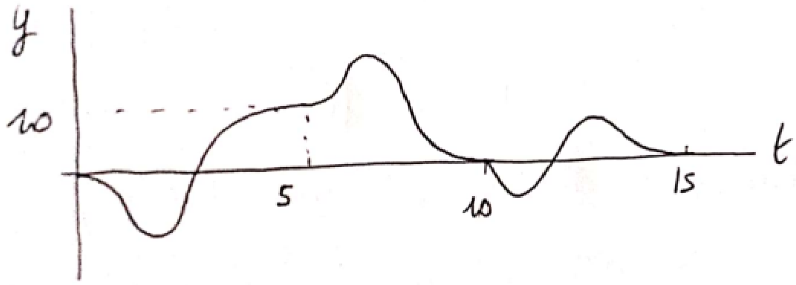
$y_{imp}(0) = \dot y_{sca}(0) = 0$

$\dot y_{imp}(0) = \ddot y_{sca}(0) < 0$

$\dot y_{sca} = 0 \rightarrow y_{imp} = 0$

Risposta complessiva

$u(t) = sca(t) - sca(t-5) + imp(t-10)$



c) $G = L$ $\quad$ L propria

$|L|_{dB} \cap\, !\ 0dB$

L non ha poli a $\mathrm{Re}>0$

$\xrightarrow{\text{BODE}}$ $\mu = 10 > 0$

$\varphi_m = -\pi < 0 \Rightarrow$ NON A.S.

$\omega_c = 1000$

$\varphi_c \simeq -2\pi$ $\qquad \varphi_m = \pi - |\varphi_c| = -\pi$

Problema 4 (6 punti)

a) Si fornisca la definizione di sistema rivelabile e si precisi sotto quali condizioni un sistema è rivelabile.

b) Si proponga un sistema (A, b, c, d) a tempo continuo di ordine 2 tale che sia instabile e rivelabile, giustificando in modo opportuno.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Un sistema (A,c) è rivelabile quando $\exists$ un ricostruttore dello stato l tale $(A+lc)$ sia asintoticamente stabile

Se (A,c) è CO allora è rivelabile

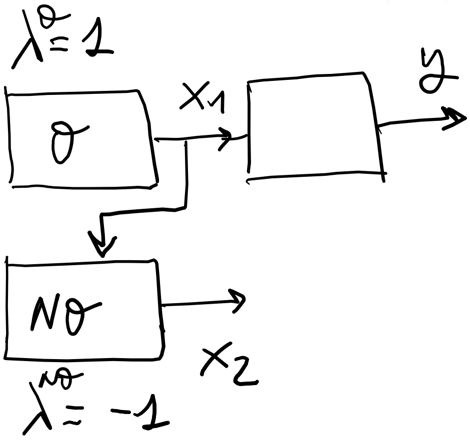
se (A,c) NON è CO, è rivelabile se e solo se la sua parte NO è asintoticamente stabile

b)

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2$$

$$y = 3x_1$$



$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

↳ INST

$$O = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det O = 0 \rightarrow$ NON CO

Parte NO ha $\lambda^{NO} = -1 \rightarrow$ è A.S.

$\Downarrow$

il sistema è rivelabile

Problema 5 (2 punti)

Sia dato un sistema di controllo con retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = 0.1\frac{1-s}{(1+0.1s)(0.1+s)^2}$$

Scrivere tutti i comandi che occorre digitare in Matlab per valutarne la pulsazione critica e il margine di fase.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

```
NUM = 0,1*[-1 1]
DEN = conv([0.1 1], conv([1 0.1],[1 0.1]))
L= tf(NUM,DEN)
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]= margin(L)
```

margine di fase

pulsazione critica