POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 8/2/2024

COGNOME:_______________________ NOME: _______________________

CODICE PERSONA: _________________________

Firma dello studente: _____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

Un fondo previdenziale suddivide i propri aderenti in tre classi, in base alla loro età: (1) da 20 a 40 anni, (2) da 40 a 60 anni, (3) oltre 60 anni. Gli aderenti di classe (1) e (2) versano ogni anno al fondo, rispettivamente, 2000 e 3000 euro, mentre quelli di classe (3) percepiscono dal fondo β euro all'anno. Ogni anno, una certa frazione α_{ij} di aderenti di classe *i* passa, per ragioni anagrafiche, alla classe j (α_{ii} è quindi la frazione che rimane nella classe *i*). I coefficienti α_{ij} sono riportati nella tabella seguente.

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Infine, ogni anno il fondo recluta un certo numero di nuovi aderenti, esclusivamente di classe (1).

a) Descrivere l'evoluzione nel tempo della popolazione degli aderenti al fondo previdenziale mediante un sistema a tempo discreto, in cui $u(t)$ sia il numero di nuovi aderenti nell'anno t e $y(t)$ sia il numero complessivo di aderenti al fondo.
b) Studiare la stabilità del sistema dinamico proposto al punto a).
c) Determinare, per ciascuna classe anagrafica, il numero di aderenti al fondo nel lungo periodo, nell'ipotesi che il numero di nuovi aderenti sia pari a 1000 ogni anno.

d) Aggiungere al modello un'ulteriore equazione di stato, la quale rappresenti l'evoluzione nel tempo della cassa del fondo previdenziale nell'ipotesi che il capitale in cassa ad inizio anno benefici di un interesse bancario del 5%.
e) Determinare la quota β erogabile annualmente agli aderenti di classe (3) nell'ipotesi che la popolazione sia nelle condizioni di equilibrio determinate al punto c), e si voglia mantenere costante la cassa del fondo previdenziale al valore di 1.000.000 euro.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_i(t) =$ n. aderenti di classe i nell'anno t , $i = 1,2,3$

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= 0.9\,x_1(t) + u(t) \\
x_2(t+1) &= 0.05\,x_1(t) + 0.8\,x_2(t) \\
x_3(t+1) &= 0.1\,x_2(t) + 0.6\,x_3(t)
\end{aligned}
\qquad
A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}
\quad
b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

b) A è triangolare : $\sigma(A) = \{0.9,\ 0.8,\ 0.6\}$

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow A$ è ASINTOTICAMENTE STABILE

c) calcolo lo stato di equilibrio :

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= 0.9\,\bar{x}_1 + 1000 \\
\bar{x}_2 &= 0.05\,\bar{x}_1 + 0.8\,\bar{x}_2 \\
\bar{x}_3 &= 0.1\,\bar{x}_2 + 0.6\,\bar{x}_3
\end{aligned}
\right\}
\Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 10'000 \\ 2'500 \\ 625 \end{vmatrix}
$$

d) $x_4(t) =$ capitale della cassa previdenziale all'inizio anno t

$$
x_4(t+1) = 1.05\,x_4(t) + 2000\,x_1(t) + 3000\,x_2(t) - \beta\,x_3(t)
$$

e) Impongo $x_4(t+1) = x_4(t) = 10^6$ e $|x_1\ x_2\ x_3| = |\bar{x}_1\ \bar{x}_2\ \bar{x}_3|$:

$$
10^6 = 1.05 \cdot 10^6 + 2000 \cdot 10^4 + 3000 \cdot 2500 - \beta \cdot 625
$$

$$
\Rightarrow \beta = 44'080
$$

2)
Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalla seguente terna di matrici:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ p \end{vmatrix} \qquad c = | p \quad 1 |$$

Al variare del parametro reale p $(-\infty < p < +\infty)$:

a) Studiare raggiungibilità e osservabilità del sistema.

b) Dire se esiste un valore di p tale per cui è possibile progettare un regolatore (composto da legge di controllo k e ricostruttore dello stato l) tale che l'errore di stima dello stato vada a zero (approssimativamente) in 2.5 unità di tempo e il sistema regolato (sistema + ricostruttore dello stato + legge di controllo) abbia un tempo di risposta pari (approssimativamente) a 5 unità di tempo.

c) Scelto un valore di p che soddisfi le specifiche richieste al punto b), determinare una possibile coppia (k, l).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $R = |b \ \ Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 1+p \\ p & -p \end{vmatrix}$ $\quad \det(R) = -p - p(1+p) = -p(2+p)$

$\forall p \neq 0, -2 \quad \det(R) \neq 0 \rightarrow CR$

se $p = 0$ oppure $p = -2 \quad \det(R) = 0 \rightarrow$ NON CR

$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & 1 \\ p & p-1 \end{vmatrix} = p(p-1) - p = p(p-2)$

$\forall p \neq 0, 2 \quad \det(\mathcal{O}) \neq 0 \rightarrow C\mathcal{O}$

se $p = 0$ oppure $p = 2 \quad \det(\mathcal{O}) = 0 \rightarrow$ NON $C\mathcal{O}$

b) $T_R^{A+lc} = 5/2 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D^{A+lc}) = -2 \qquad (*)$

$T_R^{A+bk} = 5 \rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_D^{A+bk}) = -1 \qquad (\circ)$

$\forall p \neq 0, -2, +2 \rightarrow CR + C\mathcal{O} \rightarrow$ è possibile fissare a piacere $\{\lambda\}_{A+bk}$ e $\{\lambda\}_{A+lc}$

$\rightarrow \exists k, \exists l$ che soddisfano, rispettivamente, le condizioni $(\circ)$ e $(*)$

c) $\rho = 1$ $\quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = b \quad \{\lambda\}_{A+lc} = \{-2,-2\}$

$\{\lambda\}_{A+bk} = \{-1,-1\}$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix}$

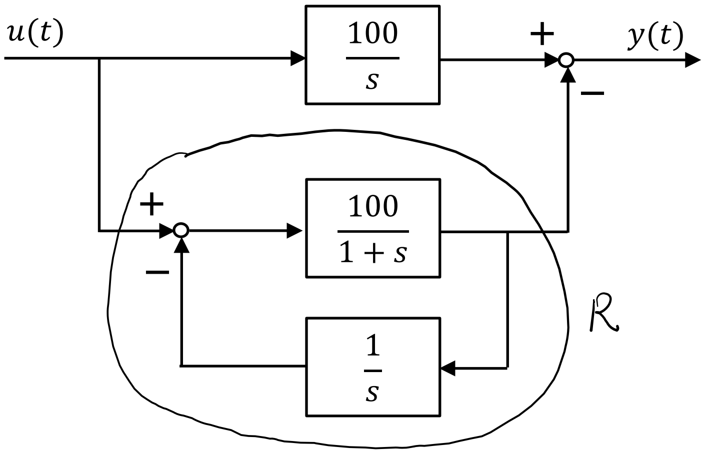
$$A + lc = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+l_1 & 1+l_1 \\ l_2 & -1+l_2 \end{vmatrix}$$

$$l_1 + l_2 = -4$$
$$(1+l_1)(-1+l_2) - l_2(1+l_1) = -1 - l_1 = 4 \qquad l = \begin{vmatrix} -5 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$A + bk = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+k_1 & 1+k_2 \\ k_1 & -1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$k_1 + k_2 = -2$$
$$(1+k_1)(-1+k_2) - k_1(1+k_2) = -1 - 2k_1 + k_2 = 1 \qquad k = \begin{vmatrix} -4/3 \\ -2/3 \end{vmatrix}$$

3)
Si consideri il sistema in figura



a) Determinare (in maniera qualitativa) la risposta all'impulso del sistema e rappresentarla graficamente.

b) Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase.

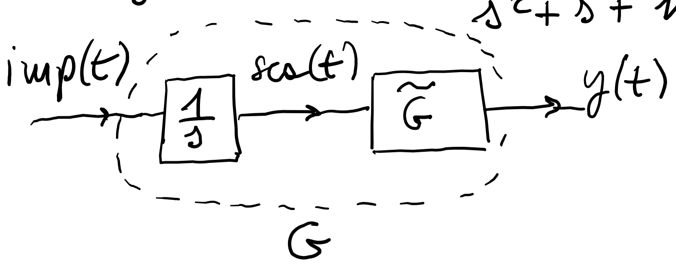
c) Determinare (NON utilizzando il diagramma di Bode ma il calcolo esplicito) l'ampiezza dell'uscita a regime quando $u(t) = 5sen(10t)$. Confrontare il risultato ottenuto con quello (approssimato) ricavabile utilizzando il diagramma di Bode. Spiegare la differenza tra i due risultati ottenuti.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $R = \dfrac{\frac{100}{1+s}}{1+\frac{1}{s}\cdot\frac{100}{1+s}} = \dfrac{100\,s}{s^2+s+100}$

$G = \dfrac{100}{s} - R = \dfrac{100}{s} - \dfrac{100\,s}{s^2+s+100} = \dfrac{100(s+100)}{s(s^2+s+100)}$

$G = \dfrac{1}{s}\cdot\tilde{G}$ con $\tilde{G} = \dfrac{100(s+100)}{s^2+s+100}$



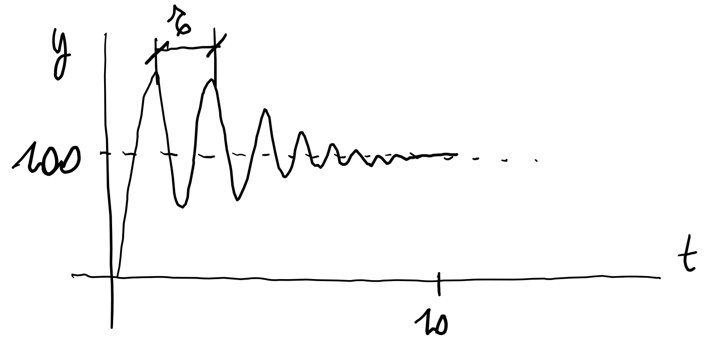
Risposta a impulso di G
=
Risposta a scalino di $\tilde{G}$

$\tilde{G}: \; p_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{399}}{2} \in \mathbb{C} \rightarrow \exists$ oo oscill $\quad T = \dfrac{2\pi}{Im(p)} = \dfrac{4\pi}{\sqrt{399}} \simeq 0{,}6$

$Re(p_D) = -\frac{1}{2} \quad T_D = 2 \quad T_R = 10$

$r=1 \to y(0)=0 \quad \dot{y}(0)=100>0$

$y_\infty=\tilde{G}(0)=100$



b) In forma standard $\quad G=\frac{100(1+0{,}01s)}{s}\cdot\frac{100}{s^2+s+100}$

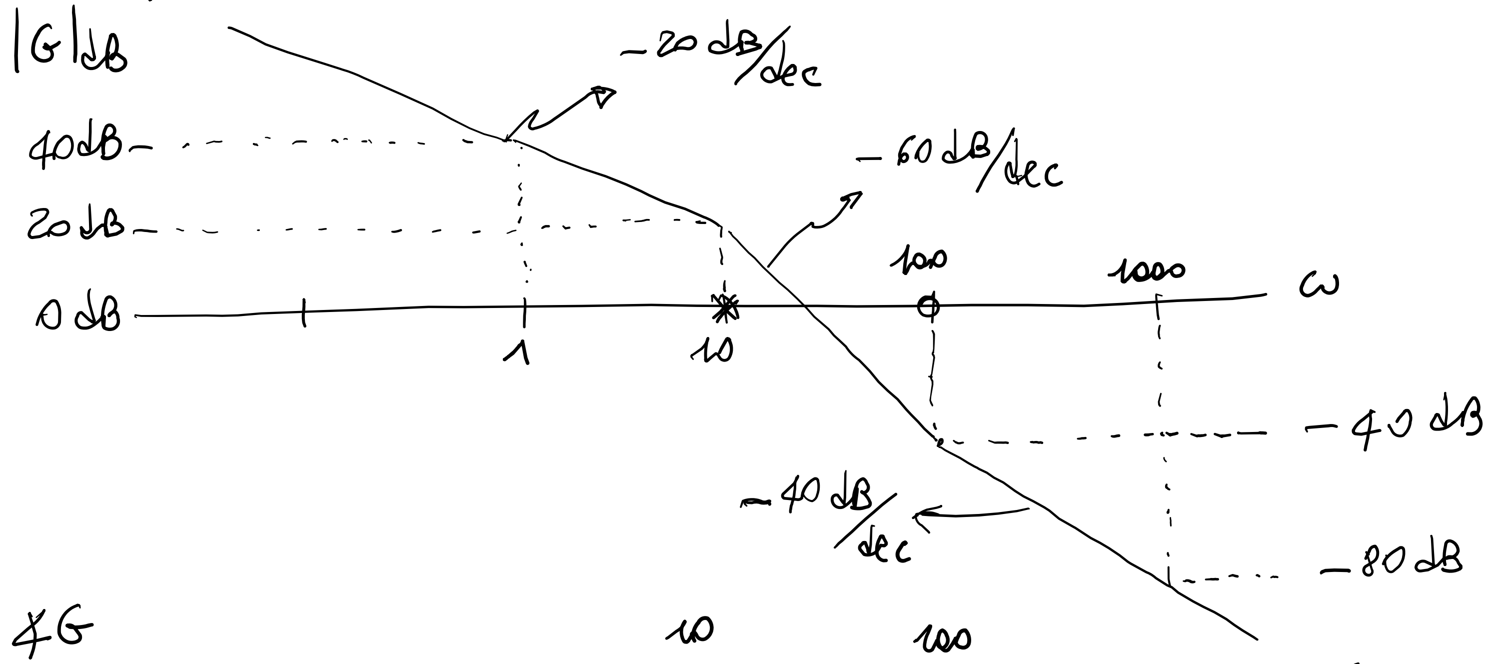
$\mu=100 \to \mu_{dB}=40\,dB$

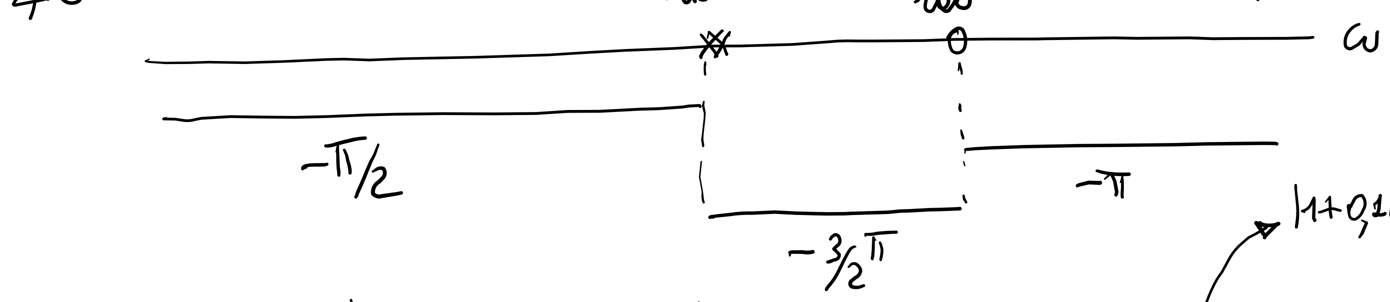
1 zero in 100

1 polo nell'origine

$\omega_n=10$

$2\xi\omega_n=1 \to \xi=\frac{1}{20}$





c) $Y=5|G(10i)| \quad Y_{esatto}=5\cdot\frac{100\,|1+0{,}1i|}{|10i|}\cdot\frac{100}{|-100+10i+100|}\simeq\frac{5\cdot100}{10}\cdot\frac{100}{10}=500$

$|1+0{,}1i|\simeq 1$

$Y_{Approx}=5\cdot 10=50$

$|G(10)|_{dB}=20\,dB$

$Y_{esatto}\neq Y_{approx}$ perché in $\omega=10$ si hanno due poli $\mathbb{C}$ con ξ piccolo $\to$ risonanza

4)

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione. (Risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) Il sistema non lineare a tempo continuo $\dot{x} = f(x)$, di ordine $n = 3$, possiede un equilibrio $\bar{x}$.

[1] Se non esistono altri equilibri, $\bar{x}$ è di sicuro asintoticamente stabile.
[2] Se $\bar{x}$ è asintoticamente stabile, allora se esistono altri equilibri sono anch'essi asintoticamente stabili.
[3] Se $\bar{x}$ è asintoticamente stabile, allora possono esistere altri equilibri instabili.

b) Il sistema non lineare a tempo discreto $x(t+1) = f(x(t))$, di ordine $n = 3$, possiede un equilibrio $\bar{x}$ il cui Jacobiano A ha autovalori $\{2i, -2i, 0\}$.

[1] Non si può affermare nulla, siamo in un caso di indeterminazione.
[2] $\bar{x}$ è instabile.
[3] $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

c) La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare (A, b, c, d) di ordine n, completamente raggiungibile e osservabile,

[1] ha n zeri.
[2] ha n zeri se e solo se $d = 0$.
[3] ha n zeri se e solo se $d \neq 0$.

d) Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s) = 10/(s^2 - 1)$. Il criterio di Bode

[1] non è applicabile.
[2] ci porta a dedurre la asintotica stabilità del sistema di controllo.
[3] ci porta a dedurre la instabilità del sistema di controllo.

4) a) [3] In un sistema non lineare, possono coesistere molteplici equilibri con diverse caratteristiche di stabilità!
La [1] è scorretta poiché, se $\exists!$ l'equilibrio, esso può essere p.e. instabile.

b) [2] $\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A$ fortemente instabile $\Rightarrow \bar{x}$ instabile

c) [3] R&O implica n poli. Quindi, num. poli = num. zeri se e solo se il sistema è improprio ($d \neq 0$).

d) [1] $L(s)$ ha poli $\{-1, +1\}$. Poiché uno dei poli ha $Re(p_i) > 0$, il criterio di Bode non è applicabile.

5)
Sia dato il sistema lineare $x(t+1) = Ax(t)$. Enunciare le condizioni di asintotica stabilità, semplice stabilità e instabilità basate sugli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ della matrice A (*prestare attenzione a necessità e sufficienza*).

Proporre quindi un esempio numerico di matrice A, non diagonale, che corrisponda a un sistema semplicemente stabile di ordine $n = 2$, verificando la semplice stabilità in base alle condizioni enunciate in precedenza.

6)
In Matlab si vogliono tracciare i diagrammi di Bode del sistema definito dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = 100\frac{1+s}{(s+0.1)(s^2+s+100)}.$$

Qual è la sequenza dei comandi da digitare?

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

5) * $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \iff A$ asintoticamente stabile

* $|\lambda_i| \leq 1 \ \forall i$; $\exists i : |\lambda_i| = 1$;
λ_i autovalore regolare $\forall i : |\lambda_i| = 1$
$\iff A$ semplicemente stabile

* $|\lambda_i| \leq 1 \ \forall i$; $\exists i : |\lambda_i| = 1$;
λ_i autovalore NON regolare per almeno un $i : |\lambda_i| = 1$
$\implies A$ instabile

* $\exists i : |\lambda_i| > 1 \implies A$ instabile

Esempio : $A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

Entrambi i λ_i hanno $|\lambda_i| = 1$, ma sono regolari poiché distinti (molt. algebrica = 1)
$\implies A$ semplicemente stabile

6)

```
>> G=tf(100*[1 1],conv([1 0.1],[1 1 100]))

>> bode(G)
```