POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 17/1/2024

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2	Voto totale 32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

In una popolazione di insetti ciascun individuo vive esattamente 3 settimane. Alla fine della *seconda* settimana di vita avviene la riproduzione, durante la quale ogni individuo depone in media f uova. La probabilità di sopravvivenza nella prima settimana di vita vale 0.001, nelle successive due settimane vale 0.1.

a) Descrivere la popolazione mediante un sistema lineare, specificando chiaramente le variabili di stato scelte.
b) Studiare la stabilità del sistema per ogni valore di $f > 0$ e discutere l'esistenza di oscillazioni nel movimento libero.
c) Introdurre nel modello una variabile d'ingresso che descriva l'immigrazione di adulti (seconda e terza classe d'età) dall'esterno, supponendo gli adulti immigrati si distribuiscano alla pari nelle due classi d'età relative, e una variabile di uscita che rappresenti il numero di uova deposte.
d) Determinare la funzione di trasferimento e il modello ingresso/uscita.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

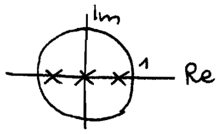
a) $x_i(t)$ = n. individui che compie i settimane all'istante t

$$x_1(t+1) = 0.001\, f\, x_2(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.1\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.1\, x_2(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 10^{-3}f & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{vmatrix}$$

b) $\Delta_A(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 10^{-4} f)$

$\sigma_A = \{0, \pm 10^{-2}\sqrt{f}\}$



A asint. stabile $\Leftrightarrow 10^{-2}\sqrt{f} < 1 \Leftrightarrow f < 10^4$

A instabile $\Leftrightarrow f > 10^4$

A semplic. stabile $\Leftrightarrow f = 10^4$
(gli autovalori con $|\lambda| = 1$ sono semplici)

$\exists\ \lambda$ reale $< 0 \Rightarrow$ oscillazioni nel movimento libero

c) $A = \begin{vmatrix} 0 & 10^{-3}f & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{vmatrix}$

$c = \begin{vmatrix} 0 & f & 0 \end{vmatrix}$

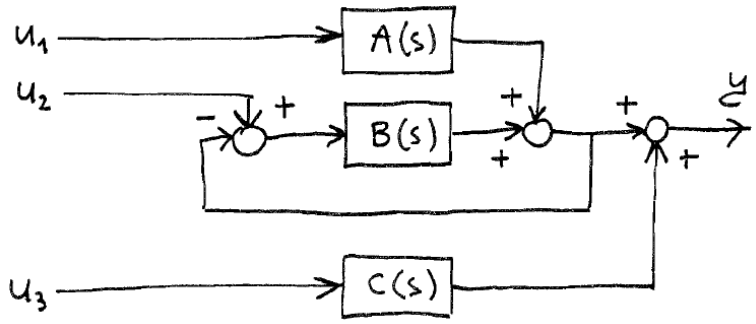
d) $\left.\begin{aligned} zx_1 &= 10^{-3} f x_2 \\ zx_2 &= 0.1\, x_1 + 0.5\, u \\ zx_3 &= 0.1\, x_2 + 0.5\, u \\ y &= f x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad G(z) = \dfrac{0.5 f z}{z^2 - 10^{-4} f}$

$y(t) = 10^{-4} f\, y(t-2) + 0.5 f (u(t-1))$

(NB: perdita di grado in $G(z)$, poiché x_3 non influenza y né direttamente né indirettamente)

2)
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui i tre blocchi hanno funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{1}{1+3s} \qquad B(s) = \frac{10}{s(1+s)} \qquad C(s) = 2\frac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$



a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascuno degli ingressi e l'uscita y, discutendone la stabilità.
b) Determinare qualitativamente, e rappresentare graficamente, l'andamento di $y(t)$ quando agli ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente, $t = 0$, $20,\ 40$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $u_1 \to y$: $(u_2 = u_3 = 0)$

$$y = Au_1 - By$$

$$y = \frac{A}{1+B} u_1 \qquad F(s) = \frac{A}{1+B} = \frac{1}{1+3s} \cdot \frac{1}{1+\frac{10}{s(1+s)}} = \frac{s(1+s)}{(1+3s)(s^2+s+10)}$$

poli: $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$: asintoticamente stabile,
$T_R \simeq 5 \cdot 3 = 15$,
oscillazioni $\tau = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{39}}{2}} \simeq 2$

$u_2 \to y$: $(u_1 = u_3 = 0)$

$$y = B(u_2 - y)$$

$$y = \frac{B}{1+B} u_2 \qquad G(s) = \frac{B}{1+B} = \frac{\frac{10}{s(1+s)}}{1+\frac{10}{s(1+s)}} = \frac{10}{s^2+s+10}$$

poli: $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$: asintoticamente stabile,
$T_R \simeq 5 \cdot 2 = 10$,
oscillazioni $\tau \simeq 2$

$u_3 \to y$: $y = C u_3$ $\quad C(s) = 2\,\dfrac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$

$(u_1 = u_2 = 0)$

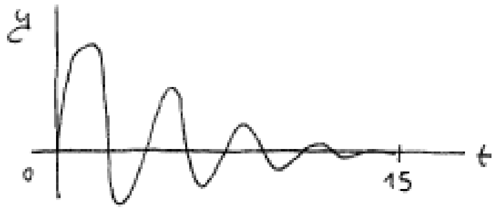
poli : $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$: asintoticamente stabile

$T_R \simeq 5 \cdot 3 = 15$

b) risp. scalino di $F(s)$:

$y_\infty = F(0) = 0$

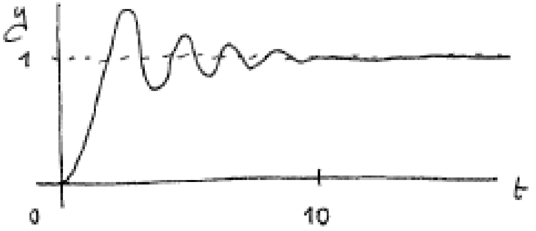
$$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$$



risp. scalino di $G(s)$:

$y_\infty = G(0) = 1$

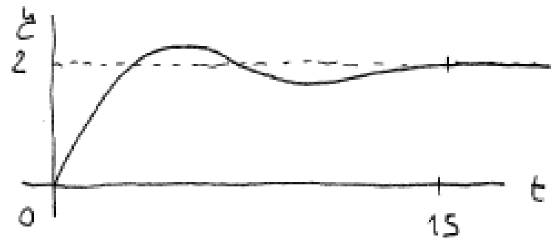
$$(r=2)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 10 > 0 \end{cases}$$



risp. scalino di $C(s)$

$y_\infty = C(0) = 2$

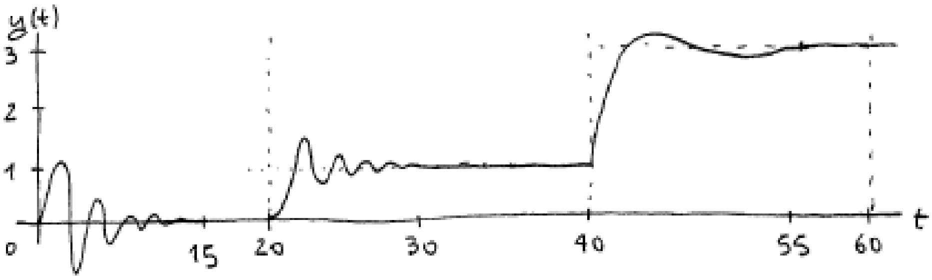
$$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{4}{6} > 0 \end{cases}$$



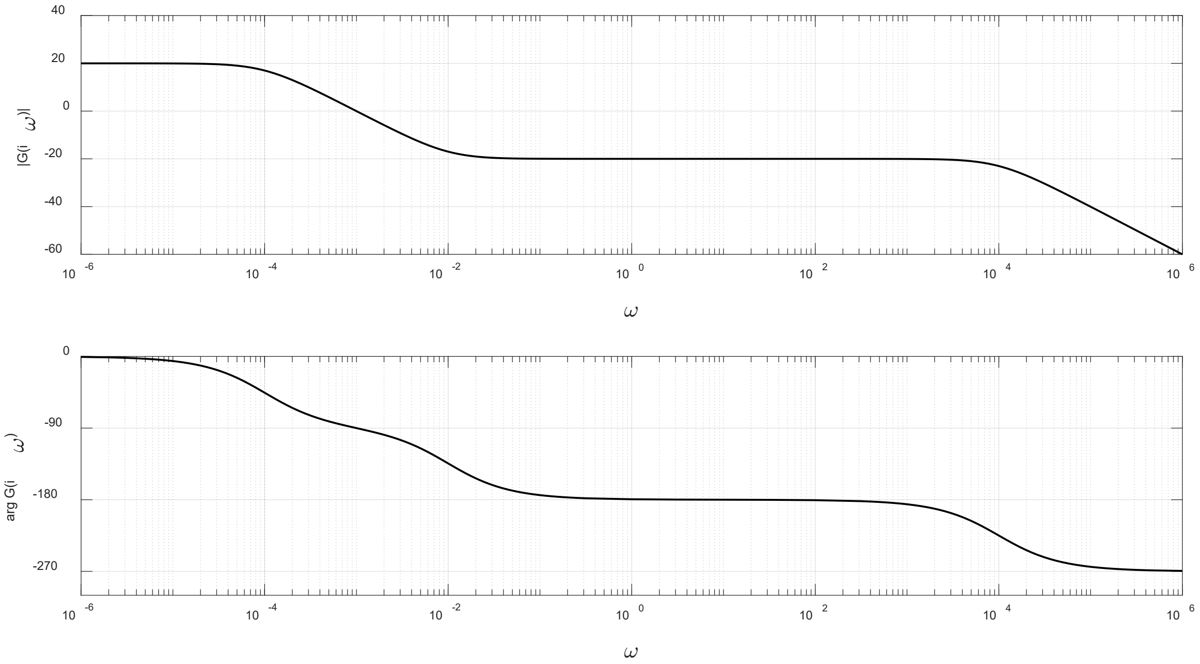
$m_s = 2$

$N = 2$

Andamento complessivo di $y(t)$:



3)
Un'apparecchiatura è sottoposta a prove sperimentali allo scopo di ricavarne la funzione di trasferimento $G(s)$. In particolare, applicando ingressi sinusoidali di ampiezza unitaria a varie frequenze ω, si sono rilevati i seguenti diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione di trasferimento $G(s)$.

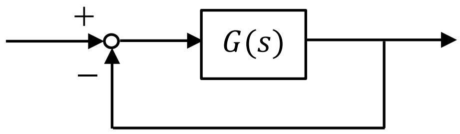


a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con i risultati delle prove sperimentali, valutandone banda passante e tempo di risposta.

b) Determinare l'uscita a transitorio esaurito corrispondente a ingresso

$$u(t) = 0.1 + 5sen(t)$$

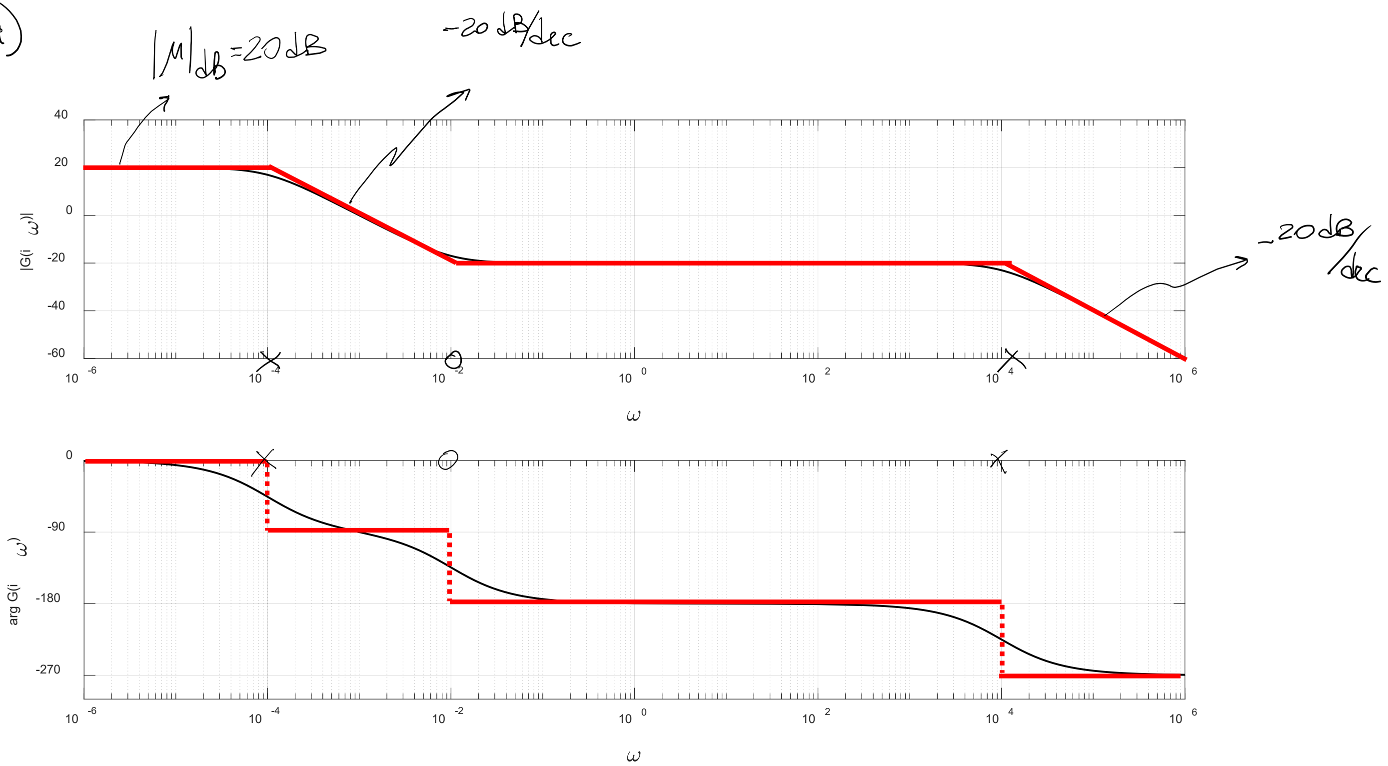
c) Infine, con riferimento al sistema Σ avente come schema



studiare la stabilità di Σ, valutandone banda passante e tempo di risposta.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)



$|\mu|_{dB} = 20dB$, $\measuredangle G|_{\omega=0} = 0$ $\longrightarrow \mu = 10$

$|$poli$|$ in $10^{-4}, 10^{4}$ con $Re<0$

$|$zeri$|$ in 10^{-2} con $Re>0$ (la fase diminuisce di $90°$)

$$G(s) = 10\,\frac{(1-10^{2}s)}{(1+10^{4}s)(1+10^{-4}s)}$$

$B = (0, 10^{-4})$ $\qquad p_D = -10^{-4}$

$T_D = 10^{4}$ e $T_R = 5 \cdot 10^{4}$

b) $u(t) = 0{,}1 + 5\,sen(t) \longrightarrow y(t) = 0{,}1 \cdot G(0) + 5\,|G(i)|\,sen(t + \measuredangle G(i))$ con $G(0) = \mu = 10$

a regime

Dai diagrammi: $|G(i)|_{dB} = -20dB \longrightarrow |G(i)| = 0{,}1$

$\measuredangle G(i) = -\pi$

Quindi $y(t) = 1 + 0{,}5\,sen(t - \pi)$

c) E' lo schema di controllo in anello chiuso con $G(s) = L(s)$ per il quale posso studiare la stabilità con il criterio di Bode

- $L(s)$ propria $(r=1)$
- $L(s)$ non ha poli a $Re>0$
- $|L|_{dB} \cap !$ asse $0dB$ (in ω_c)

$\longrightarrow$ $\mu = 10 > 0$, $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| \simeq \pi/2 > 0$ $\longrightarrow$ A.S.

$\hookrightarrow \omega_c = 10^{-3}$ $\quad \varphi_c \simeq -\pi/2$

$B = (0, \omega_c) = (0, 10^{-3})$ $\qquad T_R = \frac{5}{\omega_c} \simeq 5 \cdot 10^{3}$

4)

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione. (Risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) Il sistema lineare a tempo continuo $\dot{x} = Ax + bu$, di ordine $n = 3$, ha un sottospazio di raggiungibilità di dimensione 2.

[1] Gli stati raggiungibili appartengono a una retta passante per l'origine.
[2] Gli stati raggiungibili appartengono a una retta, non necessariamente passante per l'origine.
[3] Gli stati raggiungibili appartengono a un piano passante per l'origine.

b) Il sistema lineare a tempo continuo $\dot{x} = Ax + bu$, $y = cx$, di ordine $n = 3$, è completamente raggiungibile ma non completamente osservabile.

[1] La funzione di trasferimento ha numeratore di grado 3.
[2] La funzione di trasferimento ha denominatore di grado minore di 3.
[3] La funzione di trasferimento ha denominatore di grado 2.

c) Il sistema lineare (A, b, c) è instabile. A proposito del movimento libero $x(t)$ del sistema, si può affermare, per $t \to \infty$, che:

[1] $\|x(t)\|$ è limitato per ogni $x(0)$
[2] $\|x(t)\| \to \infty$ per almeno un $x(0)$
[3] $\|x(t)\| \to \infty$ per ogni $x(0)$

d) Il guadagno μ di un sistema (A, b, c, d), a memoria finita di ordine n, è pari a

[1] zero
[2] $c(I - A)^{-1}b + d$
[3] zero, per ogni $t \geq n$

a) [3] $\dim X_R = 2$, quindi X_R è un piano.

b) [2] Poiché il sistema non è completamente R&O, la $G(s)$ avrà denominatore di grado $< n$. Non posso però affermare che tale grado sia 2 (risp. [3]), poiché non conosco la dimensione della parte R&O.

c) [2] è la definizione di sistema lineare instabile.

d) [2] $\mu = c(I-A)^{-1}b + d$ è l'espressione del guadagno, valida per ogni sistema a tempo discreto che non abbia autovalori $\lambda = 1$, quindi anche per sistemi a memoria finita, i quali hanno $\lambda_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, n$.

5)
Sia dato il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$ e un suo equilibrio $\bar{x}$. Illustrare il metodo della linearizzazione per l'analisi della stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$, specificando quali informazioni possono essere ricavate dall'uso di tale metodo.

Inoltre, con riferimento all'equazione

$$x(t+1) = x(t)(x^2(t) - x(t) + 1)$$

determinarne tutti gli stati di equilibrio studiandone la stabilità, laddove possibile, mediante il metodo della linearizzazione.

6)
Scrivere i comandi Matlab necessari per simulare l'andamento dell'uscita del sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -2x_1(t) + x_2(t) + u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t)\\ y(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) - 3u(t)\end{aligned}$$

partendo dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$, nell'intervallo temporale [0, 5], con ingresso sinusoidale di ampiezza 2 e periodo 0.1.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

5) Metodo della linearizzazione

Calcolo la matrice Jacobiana nell'equilibrio $\bar{x}$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\bar{x}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\bar{x}}$$

Autovalori di A: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

- Se $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow \bar{x}$ è asintoticamente stabile
- Se $\exists i \,/\, |\lambda_i| > 1 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile

$$x(t+1) = x(t)\left(x^2(t) - x(t) + 1\right) = f(x(t))$$

Equilibri $x = x(x^2 - x + 1)$ $\nearrow x = 0$; $\searrow 1 = x^2 - x + 1 \rightarrow x^2 - x = 0$ $\nearrow x = 0$; $\searrow x = 1$

$A = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x + 1$

$A|_{\bar{x}=1} = 2 = \lambda > 1 \Rightarrow \bar{x} = 1$ è instabile

$A|_{\bar{x}=0} = 1 = \lambda \Rightarrow$ non si può dedurre la stabilità via metodo della linearizzazione

6)

```
A=[-2 1;-1 -1];
b=[1 0]';
c=[2 1];
d=-3;
sistema=ss(A,b,c,d);
x0=[1 -1]';
t=[0:0.001:5];
u=2*sin(2*pi/0.1*t);
lsim(sistema,u,t,x0);
```