POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 30/8/2023

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
L'azienda Centauron produce scatole per imballaggi utilizzando opportuni macchinari per la lavorazione. I macchinari sono tutti identici tra loro e differiscono solo per il fatto che sono stati acquistati e messi in esercizio in anni differenti. Ciascuno di essi realizza tutte le fasi di lavorazione.

In base alle registrazioni effettuate, nel primo anno di esercizio i macchinari subiscono un *guasto minore* (riparato in tempo trascurabile) con probabilità 10%, un *guasto grave* (il macchinario deve essere eliminato) con probabilità 0. Tali probabilità diventano rispettivamente 20% e 10% nel secondo anno di vita, e 60% e 30% in ciascun anno dal terzo in avanti.

Si supponga dapprima che l'azienda acquisti ogni anno un numero costante $u(t) = \bar{u}$ di macchinari nuovi:

a) Descrivere l'evoluzione nel tempo del parco macchinari mediante un sistema lineare a tempo discreto, in cui la variabile di uscita $y(t)$ sia il numero di *guasti minori* nell'anno t. Specificare con precisione il significato delle variabili di stato adottate, scrivere le equazioni di stato e di uscita e le corrispondenti matrici (A, b, c, d).
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni.

Si supponga poi, diversamente da prima, che il numero di macchinari nuovi $u(t)$ acquistati all'istante t sia α volte il numero di macchinari eliminati per guasto grave nell'anno appena terminato.

c) Scrivere le equazioni di stato del sistema secondo questa nuova ipotesi.
d) Discutere la stabilità del sistema per ogni $\alpha > 0$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

1) a)
$x_1(t)$: n. macchinari in servizio da 1 anno all'istante t
$x_2(t)$: ″ ″ ″ 2 anni ″ ″
$x_3(t)$: ″ ″ ″ 3 o più anni all'istante t

$t \qquad t+1$

$$x_1(t+1) = u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.9\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.7\, x_2(t) + 0.7\, x_3(t)$$

$$y(t) = 0.1\, x_1(t) + 0.2\, x_2(t) + 0.6\, x_3(t)$$

[oppure (equivalente all'equilibrio):
$$y(t) = 0.1\, x_1(t+1) + 0.2\, x_2(t+1) + 0.6\, x_3(t+1) =$$
$$= 0.1\,[u(t)] + 0.2\,[0.9\, x_1(t)] + 0.6\,[0.7(x_2(t) + x_3(t))]$$]

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{vmatrix} \quad d = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

b) $\sigma_A = \{0, 0, 0.7\}$ $\quad |\lambda_i| < 1 \;\; \forall i \Rightarrow A$ asintot. stabile

$\lambda_d = 0.7 \quad T_R \simeq 5T_d = 5 \cdot \left(-\frac{1}{\log 0.7}\right) \simeq 14$

λ_i reali non negativi $\forall i \Rightarrow$ NO oscillazioni

c) I macchinari eliminati per guasto grave sono il "complemento a 1" dei macchinari sopravvissuti, per cui:

$u(t) = \alpha \left[0.1\, x_1(t) + 0.3\, x_2(t) + 0.3\, x_3(t) \right]$

per cui:

$x_1(t+1) = \alpha \left[\; \cdots \; \right]$

$$\left.\begin{aligned} x_2(t+1) &= 0.9 x_1(t) \\ x_3(t+1) &= 0.7 x_2(t) + 0.7 x_3(t) \end{aligned}\right\} \text{invariate}$$

$$A = \begin{vmatrix} 0.1\alpha & 0.3\alpha & 0.3\alpha \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 \end{vmatrix}$$

A è matrice non negativa, calcolo le somme di colonna:

$C_1 = 0.9 + 0.1\alpha$

$C_2 = C_3 = 0.7 + 0.3\alpha$

$$(*) \begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow C_i < 1 \;\; \forall i \Rightarrow \lambda_D < 1 \Rightarrow A \text{ asint. stabile} \\ \alpha = 1 \Rightarrow C_i = 1 \;\; \forall i \Rightarrow \lambda_D = 1 \Rightarrow A \text{ sempl. st. o instabile debole} \\ \alpha > 1 \Rightarrow C_i > 1 \;\; \forall i \Rightarrow \lambda_D > 1 \Rightarrow A \text{ instabile forte} \end{cases}$$

(*) con $\alpha = 1$ si può dimostrare che A è semplic. stabile: sostituendo i macchinari eliminati con pari numero di nuovi, il totale rimane costante al valore iniziale, qualunque esso sia.

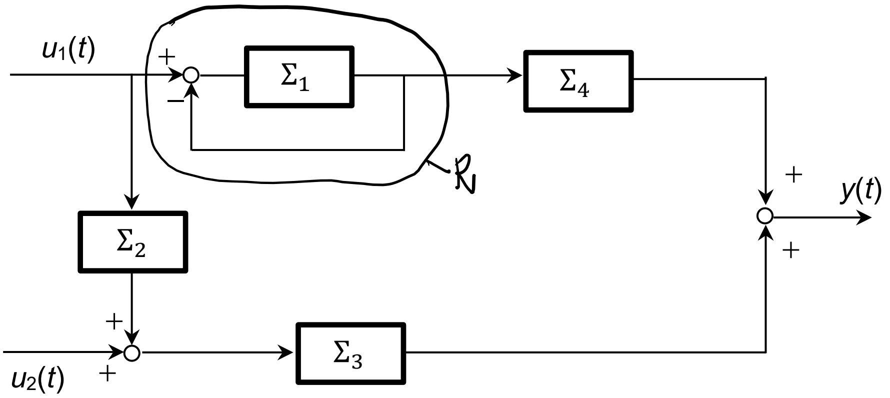
2)
Si consideri il sistema aggregato (a tempo continuo) in figura, in cui

Σ_1 è descritto dal modello di stato $A_1 = \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $b_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 12 \end{vmatrix}$ $c_1 = |1 \quad 0|$ $d_1 = 0$

Σ_2 è un integratore

Σ_3 è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_3 + 2\dot{y}_3 + 10y_3 = \dot{u}_3$

Σ_4 è un ritardatore di 10 unità di tempo.



Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta *y*(*t*) del sistema nei tre casi a), b), c) seguenti:

a) $u_1(t)$ = imp(t) $\quad$ $u_2(t) = 0$

b) $u_1(t) = 0$ $\quad$ $u_2(t)$ = sca(t)

c) $u_1(t)$ = imp(t) $\quad$ $u_2(t)$ = sca(t – 5)

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Σ_1 $\quad \dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 \qquad (s+6)x_1 = x_2 \qquad (s+6)(s-1)x_1 = 12u$

$\dot{x}_2 = x_2 + 12u \qquad (s-1)x_2 = 12u \qquad \downarrow$

$y = x_1 \qquad G_1(s) = \frac{12}{(s+6)(s-1)}$

Σ_2: $G_2(s) = \frac{1}{s}$

Σ_3: $s^2y_3 + 2sy_3 + 10y_3 = su_3 \longrightarrow G_3(s) = \frac{s}{s^2+2s+10}$

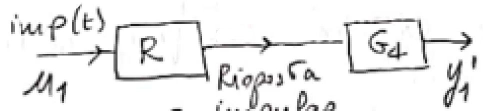
$\hookrightarrow p_{1,2} = -1 \pm 3i \qquad T_R = 5 \quad T = \frac{2\pi}{3} \simeq 2$

Σ_4: $G_4(s) = e^{-10s}$

a) $u_1 \rightarrow y \qquad F = RG_4 + G_2G_3 \qquad$ dove $R = \frac{G_1}{1+G_1} = \frac{12}{(s+2)(s+3)}$

$y = Fu_1 \longrightarrow y = \underbrace{RG_4u_1}_{y_1'} + \underbrace{G_2G_3u_1}_{y_1''} = y_1' + y_1''$

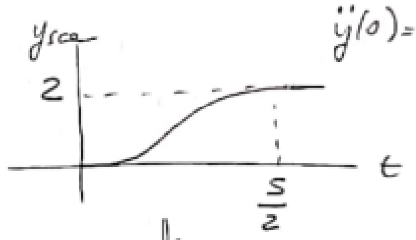
• $R G_4 u_1$



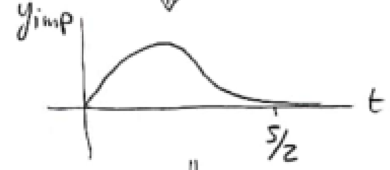
Ritardo di 10 unità

= derivata della risposta a scalino

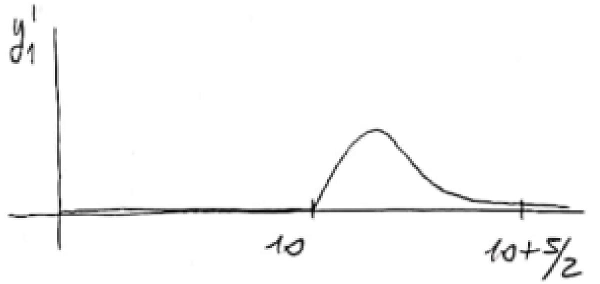
$\dot{y}(0) = 12$



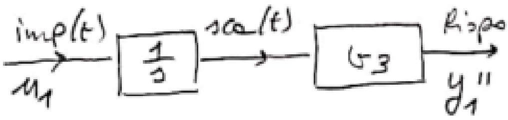
$\Downarrow$



$\Downarrow$



• $G_2 G_3 u_1$

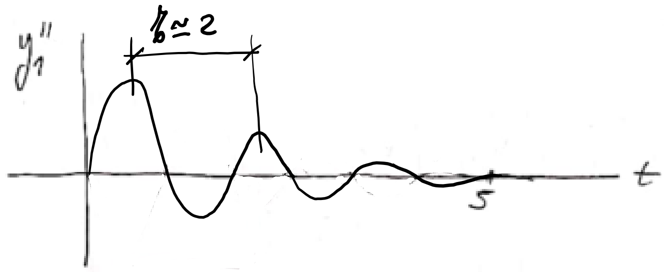


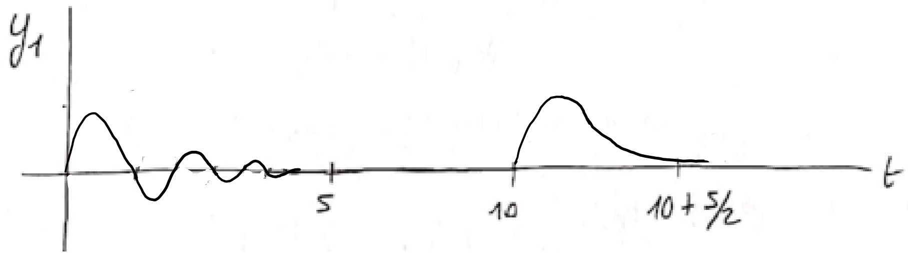
Risposta a scalino di G_3

$r = 1$ $\quad \dot{y}(0) = -1$

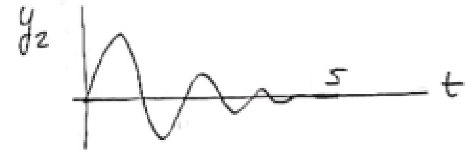
$y_\infty = 0$

$\exists\infty$ oscill

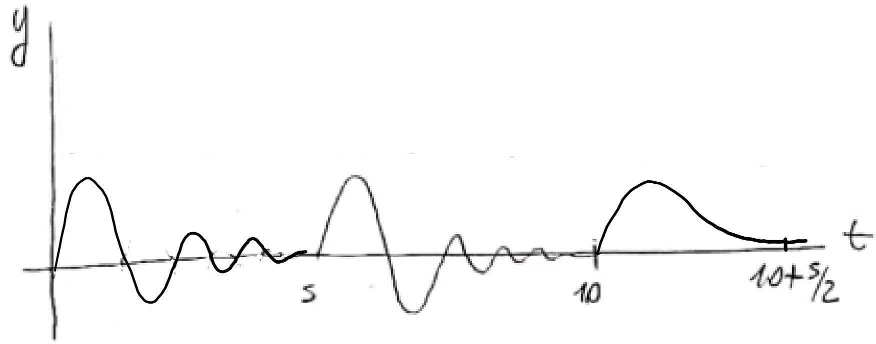




b) $u_2 \to y \qquad H = G_3 \quad y_2 = G_3 u_2$

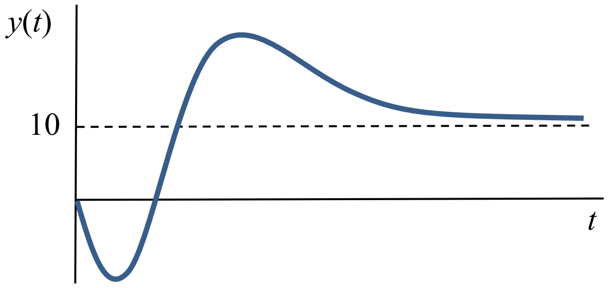


c)



3)

La figura seguente riporta la risposta a scalino rilevata sperimentalmente su un sistema lineare asintoticamente stabile.



Sono inoltre state eseguite alcune misure sperimentali, applicando al sistema un ingresso $u(t) = sen(\omega t)$ e rilevando l'ampiezza *Y* del segnale di uscita. I risultati sono riassunti nella tabella seguente.

ω	10^{-1}	10^{1}	10^{3}	10^{5}
Y	100	100	10	1

a) Determinare una possibile funzione di trasferimento *G*(*s*) compatibile con le prove sperimentali, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase.

b) Determinare (mediante i diagrammi di Bode tracciati in precedenza) l'uscita a regime quando il sistema è sottoposto a ingresso $u(t) = sen(t)$, specificando, in particolare, modulo e argomento dell'uscita e dopo quanto tempo tale andamento venga raggiunto.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $y_\infty = G(0) = 10$

$N = 2 \rightarrow$ almeno due zeri

$\dot{y}(0) \neq 0 \rightarrow r = 1$

$\mapsto$ per esempio $G(s) = 10 \dfrac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$

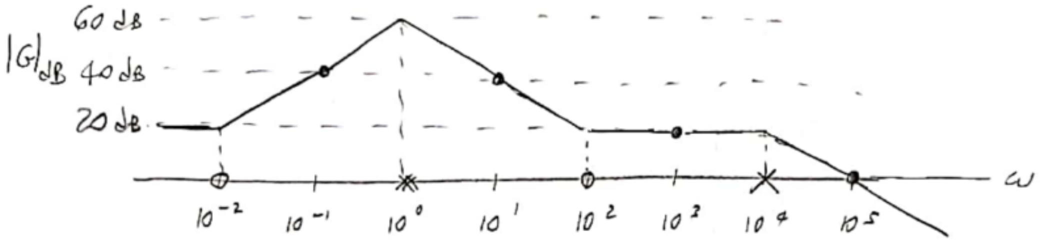
con $T_i > 0 \ \forall i$

$\dot{y}(0) = \dfrac{10\,\tau_1 \tau_2}{T_1 T_2 T_3} < 0 \Rightarrow \tau_1$ e τ_2 discordi

ω	10^{-1}	10^{1}	10^{3}	10^{5}
$\lvert G \rvert_{dB}$	40	40	20	0

$|\mu|_{dB} = 20 dB$

• misure
× |polo|
o |zero|

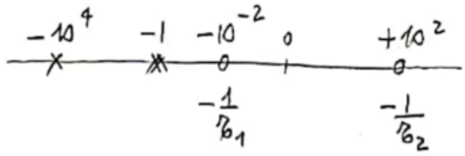


|zero| in 10^{-2} e 10^{2}

|polo| in $1, 1$ e 10^{4}

$N=2 \rightsquigarrow$

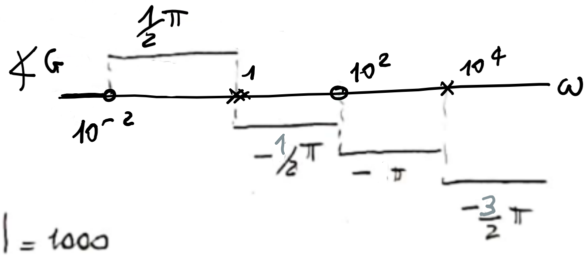
$m_s = 2$, $\delta = 0$



$\tau_1 = 10^{2}$

$\tau_2 = -10^{-2}$

$$G(s) = \frac{10\,(1+10^{2}s)(1-10^{-2}s)}{(1+s)^{2}(1+10^{-4}s)}$$



b) $p_D = -1 \longrightarrow T_D = 1$ e $T_R = 5$

$Y = |G(i)| \cdot 1 \qquad |G(i)|_{dB} = 60\ dB \rightarrow |G(i)| = 1000$

$\varphi = \measuredangle G(i) \simeq 0$

$\Rightarrow y(t) = 1000\ \mathrm{sen}(t)$

4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) La matrice di stato del sistema lineare $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ha polinomio caratteristico $\Delta_A(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 1$. Sulla base della sola conoscenza dei coefficienti del polinomio caratteristico (cioè senza calcolarne le radici e senza utilizzare test tabellari), si può affermare che

[1] il sistema è asintoticamente stabile
[2] il sistema non è asintoticamente stabile
[3] non si può affermare nulla con l'informazione a disposizione

b) Il sistema non lineare $\dot{x} = f(x(t))$, di ordine $n = 3$, ha due distinti stati di equilibrio le cui matrici jacobiane hanno rispettivamente autovalori $\{-1, -2, 1\}$ e $\{0,0,1\}$. I due equilibri

[1] sono entrambi asintoticamente stabili
[2] sono entrambi instabili
[3] non si può dedurre la stabilità dei due equilibri con l'informazione a disposizione

c) La risposta all'impulso di un sistema (A, b, c) a tempo continuo vale

[1] $bA^t c$
[2] $cA^t b$
[3] $ce^{At} b$

d) La risposta all'impulso di un sistema (A, b, c) a memoria finita di ordine n

[1] vale zero, per ogni $t \geq 0$
[2] vale zero, per ogni $t \geq n$
[3] vale $y(t) = \bar{y} \neq 0$ costante, per ogni $t \geq n$

a) [3] A as. stabile $\Rightarrow \alpha_i > 0 \ \forall i$, ma non vale l'implicazione opposta

b) [2] Per entrambi gli equilibri, la jacobiana ha λ_i t.c. $Re(\lambda_i) > 0$, quindi è fortemente instabile $\Rightarrow$ l'equilibrio di $\dot{x} = f(x)$ è instabile

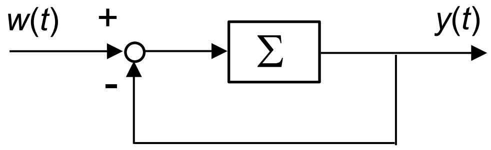
c) [3] vedi teoria

d) [2] A è asint. stabile, per cui $y(t) \to 0$. Il sistema è a memoria finita, per cui $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$ $\forall t \geq n$.

5)
Si enunci il criterio di Bode per la verifica della asintotica stabilità di un sistema di controllo. Si specifichino chiaramente ipotesi, condizioni di applicabilità e condizioni di stabilità.

Si proponga quindi una funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ tale per cui siano verificate le condizioni di applicabilità del criterio di Bode ma il sistema di controllo risulti instabile.

6)
In Matlab, si vuole calcolare il margine di fase del sistema a tempo continuo mostrato in figura



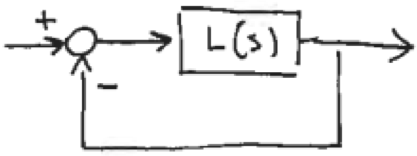
Il sistema Σ è definito dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c = [0 \quad -10 \quad -10] \qquad d = 0$$

Qual è la sequenza di comandi da digitare?

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

5) Si consideri il sistema di controllo in figura,



avente funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ propria, con $L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_j (1+sT_j)}$

Si assuma (condizioni di applicabilità):

a) $L(s)$ non ha poli nel semipiano destro, cioè $\nexists i : Re(p_i) > 0$

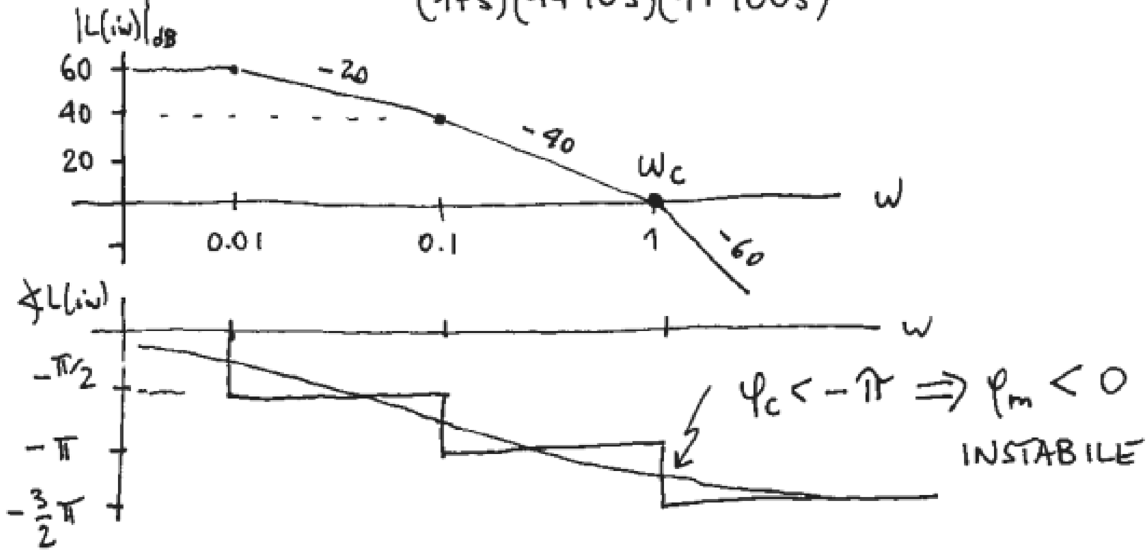
b) il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ ha una e una sola intersezione con l'asse 0 dB, cioè $\exists! \, \omega = \omega_c$ t.c. $|L(i\omega_c)| = 1 = 0\,dB$

Allora (condizioni di stabilità) $H(s) = L(s)/(1+L(s))$ è asintoticamente stabile se e solo se

1) $\mu > 0$

2) $\varphi_m > 0$, dove $\varphi_m = \pi - \arg L(i\omega_c)$

Esempio: $L(s) = \dfrac{1000}{(1+s)(1+10s)(1+100s)}$



6)

```
A=[-1 0 0; -2 -2 1; 0 -2 -5];
b=[1 1 0]';
c=[0 -10 -10];
d=0;
sistema=ss(A,b,c,d);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(sistema)    -->    Pm = margine di fase
```