POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 17/7/2023

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

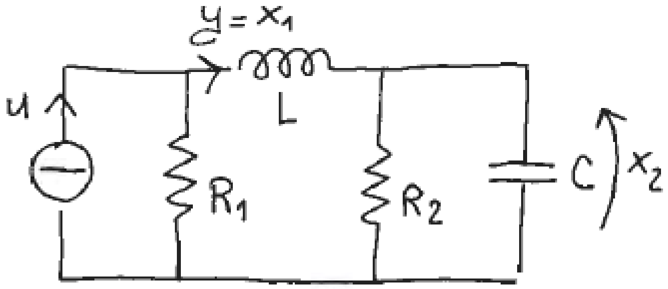
Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

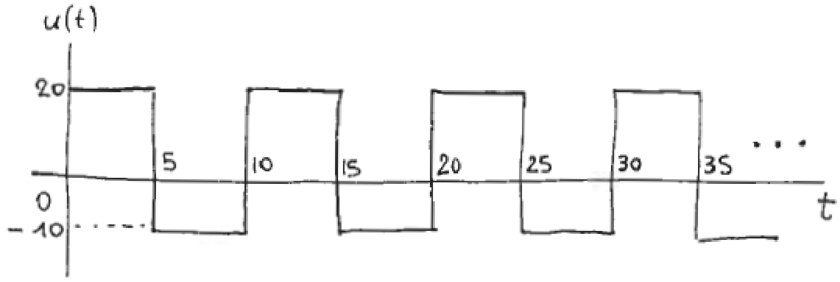
1)
Si consideri la rete elettrica in figura, in cui $u(t)$ è la corrente imposta dal generatore e $y(t)$ è la corrente che attraversa l'induttore.



a) Si descriva la rete elettrica mediante un sistema dinamico lineare a tempo continuo, scrivendo le equazioni di stato e l'equazione di uscita. Si specifichi poi la quaterna di matrici (A, b, c, d) corrispondente.
b) Si discuta la stabilità del sistema per ogni $R_1, R_2, C, L > 0$.
c) Si determini, in modo qualitativo, la risposta allo scalino e all'impulso del sistema nei due casi seguenti:

caso 1: $R_1 = R_2 = C = L = 1$
caso 2: $R_1 = 4,\ R_2 = C = L = 1$

d) Si supponga che l'ingresso $u(t)$ abbia l'andamento descritto nella figura seguente:



Per il solo caso 2, si determini il corrispondente andamento dell'uscita $y(t)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $$\dot{x}_1 = \frac{1}{L}\left(v_{R_1} - x_2\right) = \frac{1}{L}\left(R_1(u - x_1) - x_2\right)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}\left(x_1 - i_{R_2}\right) = \frac{1}{C}\left(x_1 - \frac{x_2}{R_2}\right)$$

$$y = x_1$$

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} \frac{R_1}{L} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad d = 0$$

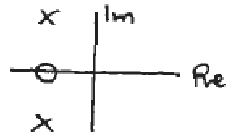
b) $$\left.\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= -\frac{R_1}{L} - \frac{1}{CR_2} < 0 \\ \det A &= \frac{R_1}{LCR_2} + \frac{1}{LC} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \text{ asint. stabile } \forall R_1, R_2, C, L > 0$$

c) caso 1: $A = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$ $d = 0$

$$\begin{cases} s x_1 = -x_1 - x_2 + u \\ s x_2 = x_1 - x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \Longrightarrow G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

poli: $s = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$



risp. scalino:

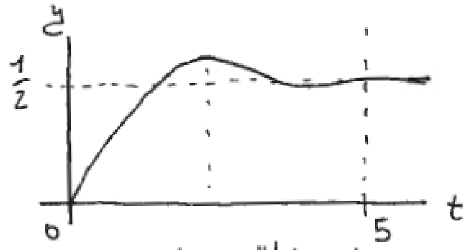
$y_\infty = G(0) = 1/2$

$T_R \simeq 5 T_D = 5$

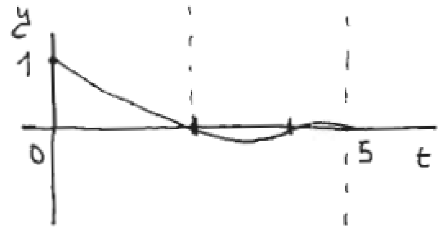
$r = 1$: $y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = 1 > 0$

oscillazioni, $\tau = \frac{2\pi}{Im(p)} = 2\pi$



risposta all'impulso:



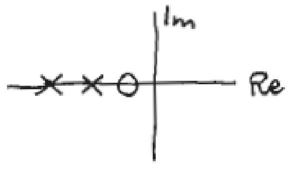
caso 2 : $A = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$ $d = 0$

$$\begin{cases} s x_1 = -4x_1 - x_2 + 4u \\ s x_2 = 1x_1 - x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \Longrightarrow G(s) = \frac{4(s+1)}{s^2+5s+5}$$

poli: $s = \frac{-5 \pm \sqrt{25-20}}{2} =$

$= \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2} \simeq -3.62, -1.38$



risp. scalino :

$y_\infty = G(0) = 4/5$

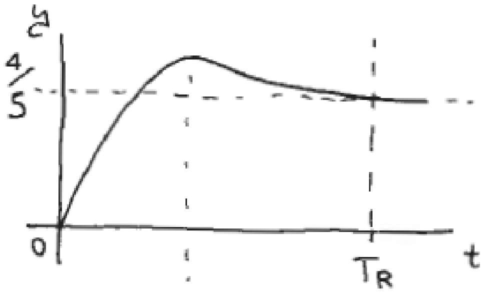
$T_R \simeq 5 T_D \cong 5 \times \dfrac{1}{1.38} \simeq 3.61$

$r = 1 : \; y(0) = 0$

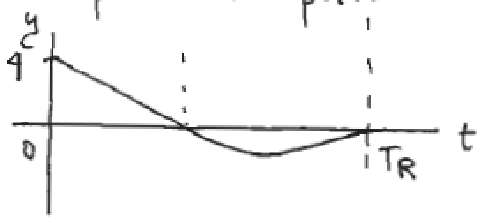
$\qquad \dot{y}(0) = 4 > 0$

$\exists 1$ zero superiore

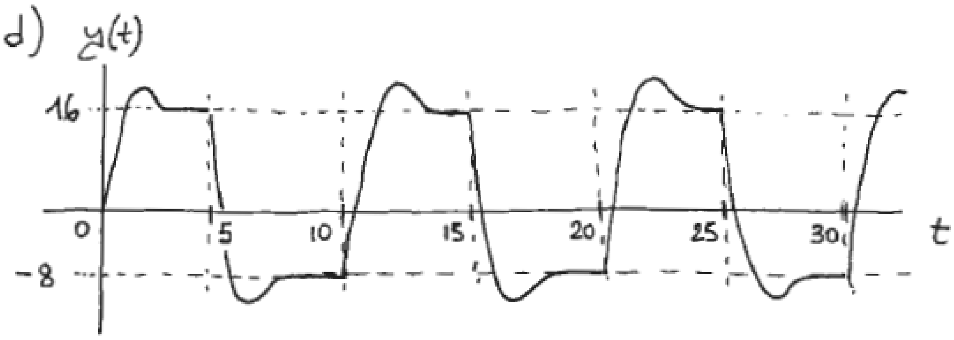
$\qquad \Rightarrow 1$ estremo



risposta all'impulso :



d)



2)
Sia data l'equazione di stato

$$\dot{x}(t) = -px(t) + x^3(t) - 3x^2(t) + 2x(t)$$

Per ogni $p \in R$:

a) calcolare gli equilibri;

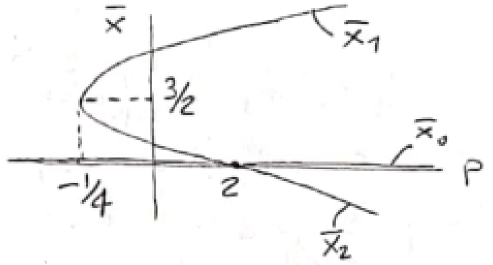
b) studiarne la stabilità;

c) riassumere i risultati ottenuti rappresentando gli equilibri e la relativa stabilità in un grafico (p, x) (utilizzare una linea continua per gli equilibri asintoticamente stabili e una linea a tratti per gli equilibri instabili).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$\dot{x} = \underbrace{-px + x^3 - 3x^2 + 2x}_{f(x,p)} = x(\underbrace{-p + x^2 - 3x + 2}_{F(x,p)})$$

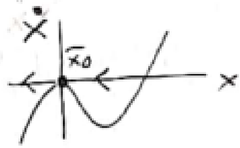
a) $\dot{x} = 0 \begin{cases} \bar{x}_0 = 0 \quad \forall p \\ F(x,p) = 0 \quad - \quad x^2 - 3x + 2 - p = 0 \begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{3+\sqrt{1+4p}}{2} \\ \bar{x}_2 = \dfrac{3-\sqrt{1+4p}}{2} \end{cases} \quad p \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$



b) $J = \dfrac{\partial f}{\partial x} = F + x\dfrac{\partial F}{\partial x}$ dove $F = -p + x^2 - 3x + 2$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3$

$J_{\bar{x}_0} = -p + 2 \begin{cases} p < 2 & \text{INST} \\ p > 2 & \text{A.S.} \\ p = 2 & ? \rightarrow \dot{x} = -\cancel{2x} + x^3 - 3x^2 + \cancel{2x} = x^3 - 3x^2 \end{cases}$



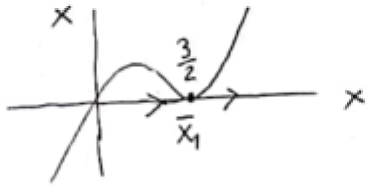
$\bar{x}_0$ INST

$J_{\bar{x}_1} = \bar{x}_1(2\bar{x}_1 - 3)$

- $p > -\frac{1}{4}$ $\quad (\bar{x}_1 > \frac{3}{2})$ INST
- $p = -\frac{1}{4}$? $(\bar{x}_1 = \frac{3}{2}) \rightarrow \dot{x} = x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x$

$\downarrow$

$F(\bar{x}_1, p) = 0$



$\bar{x}_1$ INST

$J_{\bar{x}_2} = \bar{x}_2(2\bar{x}_2 - 3)$

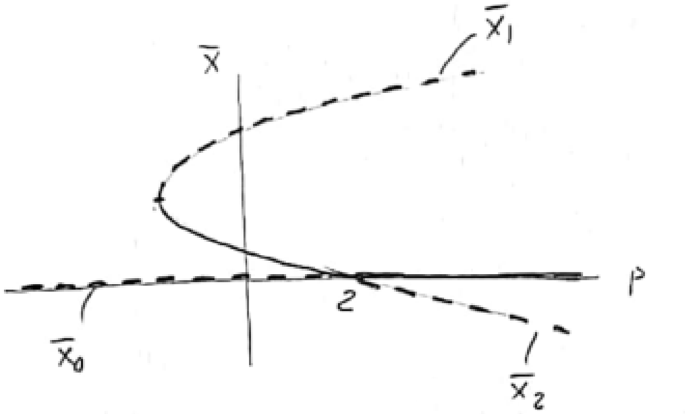
- $-\frac{1}{4} < p < 2$ $\quad (0 < \bar{x}_2 < 3/2)$ A.S.
- $p > 2$ $\quad (\bar{x}_2 < 0)$ INST
- $p = -\frac{1}{4}$ come $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ INST
- $p = 2$ come $\bar{x}_0 = \bar{x}_2$ INST

$\downarrow$

$F(\bar{x}_2, p) = 0$

c) —— AS: STAB

\- - - INST



In alternativa: $\quad J = \frac{\partial f}{\partial x} = -p + 3x^2 - 6x + 2$

$\bar{x}_0 = 0$

$J_{\bar{x}_0} = -p + 2$

- $p < 2$ INST
- $p > 2$ A.S.
- $p = 2$? $\Rightarrow$ sostituire $p = 2$ come sopra

$\bar{x}_1 = \frac{3+\sqrt{1+4p}}{2}$ con $p \geq -\frac{1}{4}$

$J_{\bar{x}_1} = -p + 3\left[\frac{3+\sqrt{\ }}{2}\right]^2 - \cancel{6}^{3}\left[\frac{3+\sqrt{\ }}{\cancel{2}}\right] + 2 =$

$= -p + 3\,\frac{9+1+4p+6\sqrt{\ }}{4} - 9 - 3\sqrt{\ } + 2 =$

$= -p + 3\left(\frac{5+2p+3\sqrt{\ }}{2}\right) - 7 - 3\sqrt{\ } = -p + \frac{15}{2} + 3p + \frac{9}{2}\sqrt{\ } - 7 - 3\sqrt{\ } =$

$= \underbrace{2p + \frac{1}{2}}_{\geq 0 \text{ per } p \geq -\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{3}{2}\sqrt{1+4p}}_{\geq 0} \geq 0$

$> 0 \quad p > -\frac{1}{4} \Rightarrow$ INSTAB

$0 \quad p = -\frac{1}{4}$? $\Rightarrow$ sostituire $p = -\frac{1}{4}$ come sopra

$\bar{x}_2 = \frac{3-\sqrt{1+4p}}{2}$ con $p \geq -\frac{1}{4}$

$J_{\bar{x}_2} = -p + 3\left[\frac{3-\sqrt{\ }}{2}\right]^2 - \cancel{6}^{3}\left[\frac{3-\sqrt{\ }}{\cancel{2}}\right] + 2 =$

$= -p + 3\,\frac{9+1+4p-6\sqrt{\ }}{4} - 9 + 3\sqrt{\ } + 2 =$

$= -p + \frac{15}{2} + 3p - \frac{9}{2}\sqrt{\ } - 7 + 3\sqrt{\ } = \underbrace{2p + \frac{1}{2}}_{\geq 0} - \frac{3}{2}\sqrt{1+4p}$

$\to$ se > 0 $\bar{x}_2$ è INST

$\to = 0$ in $p = -\frac{1}{4}$ $\to$ studio per sostituzione (già fatto)

$2p + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}\sqrt{1+4p} \to 1+4p > 3\sqrt{1+4p}$

$\sqrt{1+4p} > 3 \to 1+4p > 9 \to p > 2$

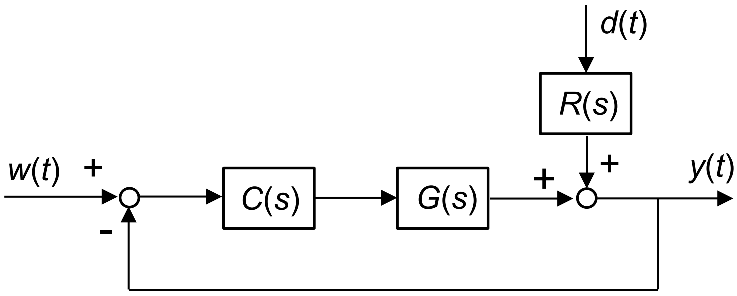
$\bar{x}_2$ — INST $\quad p > 2$

$\bar{x}_2$ — A.S. $\quad -\frac{1}{4} < p < 2$

da studiare per sostituzione in cui $p = 2$ e $p = -\frac{1}{4}$ $\to$ ($J_{\bar{x}_2} = 0$)

3)

Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui $G(s) = 10\frac{1-0.01s}{(1+0.1s)^2}$ e $R(s) = \frac{1}{(1+10s)^2}$.



a) Determinare un controllore $C(s)$, con esattamente un polo e uno zero, tale che:

- il sistema di controllo sia asintoticamente stabile;
- l'errore a transitorio esaurito dovuto a riferimento $w(t)$ e disturbo $d(t)$ costanti sia nullo;
- il tempo di risposta sia circa pari a 50.

Per il sistema di controllo così ottenuto:

b) determinare il margine di fase e la banda passante;

c) determinare l'ampiezza dell'errore a transitorio esaurito dovuto al disturbo

$$d(t) = 10 + 2sen(t)$$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Per soddisfare il secondo requisito, è necessario che $C(s)$ abbia un polo in $s=0$. Quindi

$$C(s) = \mu \frac{1+s\tau}{s}$$

Ponendo $\tau = 0{,}1$ elimino un polo di G e la fase di L aumenta

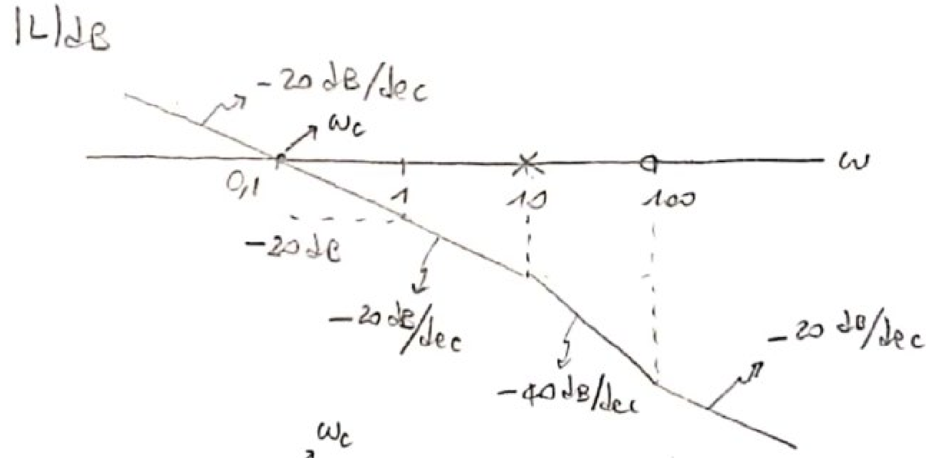
$$\Longrightarrow L = CG = \mu \frac{10}{s} \frac{1-0{,}01s}{1+0{,}1s}$$

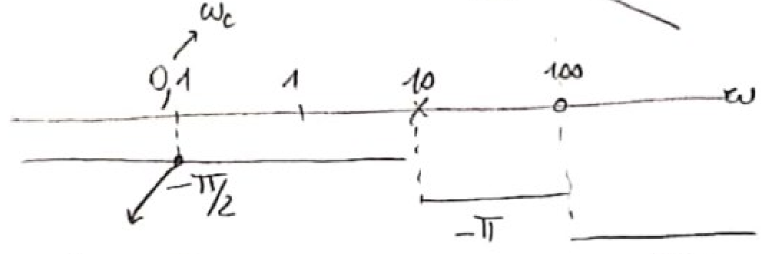
Devo scegliere μ in modo che $T_R = 50 \rightarrow \omega_c = 0{,}1$ $\left(T_R = \frac{5}{\omega_c}\right)$

$$\Rightarrow \mu = 0{,}01 \qquad L = \frac{0{,}1}{s} \frac{1-0{,}01s}{1+0{,}1s} \qquad \text{con } \tilde{\mu} = 0{,}1$$

dove $C = 0{,}01 \frac{1+0{,}1s}{s}$

Infatti, si ha:



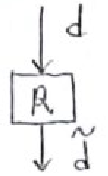


$\varphi_c \simeq -\pi/2$

L propria
$|L|_{dB} \cap ! \; 0\,dB$ $\xrightarrow{BODE}$ $\tilde{\mu} = 0{,}1 > 0$
L non ha poli a $\mathbb{R}e > 0$ $\quad \varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi - |-\pi/2| = \pi/2 > 0 \Rightarrow$ A.S.

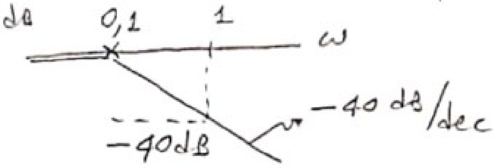
b) $\varphi_m = \pi/2 \qquad BP = (0, \omega_c) = (0,\ 0.1)$

c)



$$\tilde{d}_\infty = 10 \cdot \underbrace{R_1(0)}_{1} + 2\,\underbrace{|R(i)|}_{0{,}01} \operatorname{sen}(t+\varphi) = 10 + 0{,}02 \operatorname{sen}(t+\varphi)$$

NON va sull'errore essendo L di tipo 1



$$\Rightarrow E = 0{,}02 \cdot \left|\frac{1}{1+L}\right|_{s=i} = 0{,}02$$

disturbo fuori banda

$$\left|\frac{1}{1+L}\right|^{dB}_{s=i} = 0\,dB \to \left|\frac{1}{1+L}\right|_{s=i} = 1$$

4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) Il sistema lineare $x(t+1) = Ax(t)$, di ordine $n = 3$, ha autovalori $\{-2, 0, 1\}$. Il sistema

[1] è asintoticamente stabile
[2] è instabile
[3] non si può affermare nulla con l'informazione a disposizione

b) Il sistema non lineare $x(t+1) = f(x(t))$, di ordine $n = 3$, ha un equilibrio $\bar{x}$ il cui Jacobiano ha autovalori $\{-2, 0, 1\}$. L'equilibrio

[1] è asintoticamente stabile
[2] è instabile
[3] non si può affermare nulla con l'informazione a disposizione

c) La risposta allo scalino di un sistema (A, b, c, d) proprio, asintoticamente stabile, con funzione di trasferimento $G(s)$, presenta estremi (massimi e/o minimi)

[1] se e solo se $G(s)$ ha poli complessi
[2] se $G(s)$ ha poli tutti reali e uno zero nullo
[3] se $G(s)$ ha poli tutti reali e nessuno zero

d) Dato il sistema lineare (A, b, c, d), il numero di poli della sua funzione di trasferimento $G(s)$

[1] è sempre non maggiore del numero di zeri
[2] è sempre non minore del numero di zeri
[3] è minore del numero di zeri se e solo se $d \neq 0$

a) [2] $\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A$ instabile

b) [2] $\exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A(\bar{x})$ (Jacobiano) è fortemente instabile $\Rightarrow \bar{x}$ è instabile

c) [2] per il th. degli estremi nella risposta allo scalino: se A è asint. stabile, allora $z=0$ è uno zero superiore

d) [2] grado (DEN) $\geq$ grado (NUM), per ogni $G(s)$

5)
La matrice di stato A del sistema a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$, di ordine $n \geq 2$, ha polinomio caratteristico $\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$.

a) Enunciare i risultati disponibili per discutere la stabilità del sistema sulla base dei soli coefficienti α_i, cioè senza calcolare le radici del polinomio caratteristico. Per ciascun risultato enunciato, specificare se si tratta di condizione necessaria, o sufficiente, o necessaria e sufficiente, e per quali valori di n è valido.

b) Proporre poi un esempio numerico di polinomio $\Delta_A(\lambda)$ di ordine $n = 3$, verificando – in base a quanto discusso al punto a) – che è relativo a un sistema asintoticamente stabile.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) per $n=2$:

* A asint. stabile $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2 > 0$

per $n \geqslant 2$:

* A asint. stabile $\Rightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$

* (criterio di Hurwitz)

$$\underset{(n\times n)}{H} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} D_1 & D_2 & D_3 & \cdots & & & D_n = H \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & & & & \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & & \\ \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & & & & & & & \end{array}\right| \end{array}$$

con $\alpha_i = 0$ se $i > n$

A asint. stabile $\Leftrightarrow$ $D_1, D_2, \dots D_n$ hanno tutte determinante > 0

b) $\Delta_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$D_1 = 2 > 0$ ✓

$D_2 = 2 \times 2 - 1 > 0$ ✓

$D_3 = 1 \cdot (2 \times 2 - 1) > 0$ ✓

$\Rightarrow$ A asint. stabile

6)

Sia dato il sistema lineare a tempo continuo descritto dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s+10}$$

Il sistema è sottoposto a ingresso $u(t) = sen(100t)$.

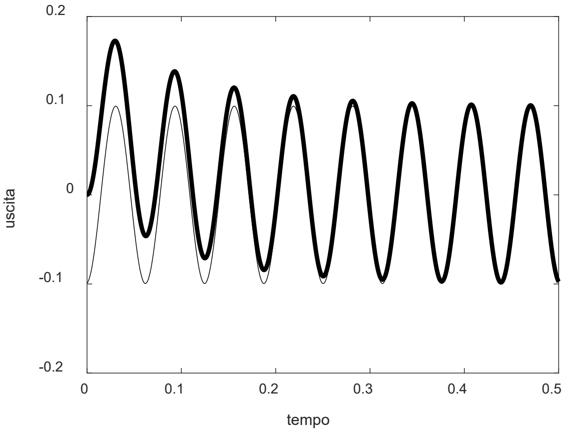
Scrivere i comandi Matlab necessari per

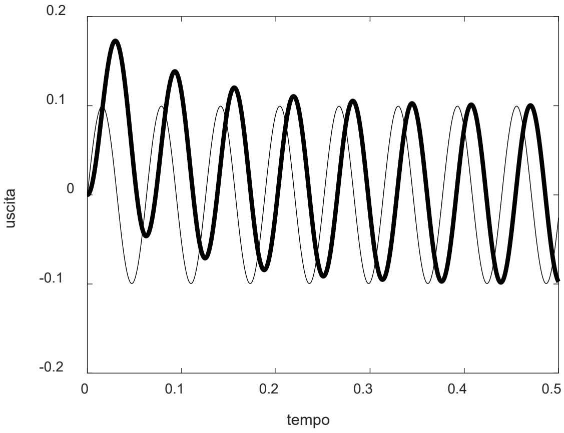
a) calcolare e tracciare l'uscita del sistema inizialmente a riposo,

b) calcolare e tracciare l'uscita del sistema a transitorio esaurito.

Infine,

c) quale delle due figure rappresenta il risultato dei comandi? (Non occorre giustificare; risposta errata: – 0.5)





: uscita del sistema inizialmente a riposo

: uscita del sistema a transitorio esaurito

---

a)
```
num = 10
den = [1 10]
G = tf(num, den)
T = 0.5
t = [0: T/10000 :T]
u = sin(100*t)
y = lsim(G, u, t)
plot(t, y)
```

NOTA: $p_0 = -10$ $\quad T_0 = \frac{1}{10}$

$T_R = 5T_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\omega = 100 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 0{,}06$

$\rightarrow T = 0{,}5$

b) [mag, ph] = bode(G,100)

```
yf = mag * sin(100*t + ph*pi/180)
plot(t, yf)
```

c) È corretta la figura di sinistra.
Poichè il sistema è asintoticamente stabile, l'uscita corrispondente a qualunque condizione iniziale (anche nulla) tende verso l'uscita di regime.
I due andamenti devono quindi sovrapporsi a transitorio esaurito.