POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 21/6/2023

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
7	7	7	4	5	2		32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto dalla seguente terna di matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per ogni $p \in R$:
a) Discutere la stabilità (interna) del sistema.
b) Discutere la stabilità esterna del sistema.
c) Determinare la dimensione del sottospazio di non osservabilità.
d) Determinare la dimensione del sottospazio di raggiungibilità.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\sigma_A = \{-2, -3, 1\}$ $\quad \exists i : Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow A$ instabile $\forall p$

b) Calcolo la F. di t.:

$$\begin{cases} s x_1 = -2x_1 + x_3 + u \\ s x_2 = x_1 - 3x_2 \\ s x_3 = x_3 + pu \end{cases} \rightarrow G(s) = \frac{s + (p-1)}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

$y = x_2$

* $p = 0$: $G(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}$ $\quad Re(p_i) < 0 \ \forall i \Rightarrow G(s)$ est. stab.

* $p = 3$: $G(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+3)}$

* $p = 4$: $G(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)}$

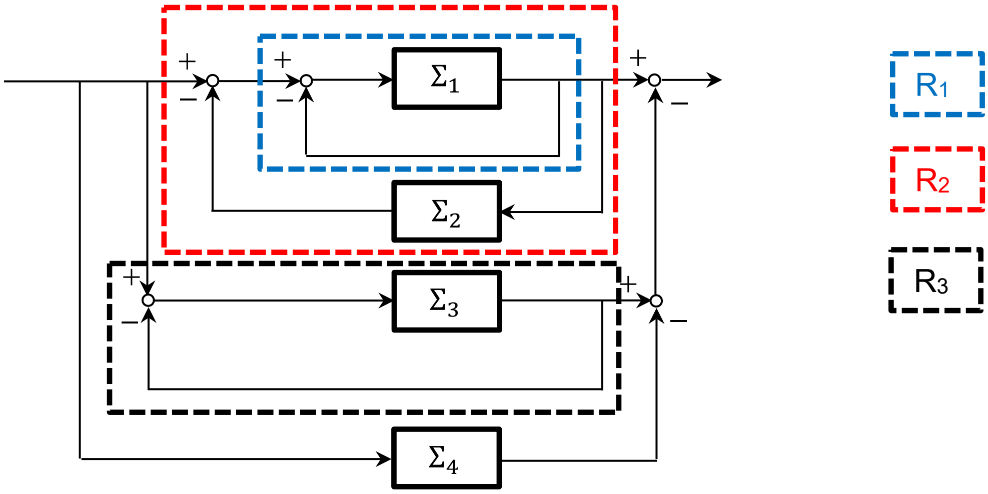
* $p \neq 0, 3, 4$: $G(s) = \dfrac{s+(p-1)}{(s-1)(s+2)(s+3)}$

$\exists i : Re(p_i) > 0 \Rightarrow G(s)$ est. instabile

c) $$\Theta = \begin{vmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -5 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$ det $\Theta \neq 0$
$\Rightarrow (A, c)$ compl. oss. $\forall p$
$\Rightarrow \dim X_{NO} = 0$

d) Poiché il sistema è compl. osservabile, R sarà singolare per i valori di p che fanno perdere grado a $G(s)$.
Per quei valori $(p = 0, 3, 4)$ il grado del den. di $G(s)$ è 2, per cui la parte $(R, 0)$ ha dim $2 \Rightarrow \dim X_R = 2$.
Per $p \neq 0, 3, 4$, det $R \neq 0 \Rightarrow \dim X_R = 3$.

2)
Si consideri il sistema aggregato (a tempo continuo) rappresentato in figura.



Il sistema Σ_1 è descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_1(s) = \frac{6}{s-1}$$

Il sistema Σ_2 è un integratore.

Il sistema Σ_3 è descritto dal modello di stato

$$A_3 = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & p \end{vmatrix} \qquad b_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \qquad c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad d_3 = 0$$

Infine, il sistema Σ_4 è descritto dal modello ingresso/uscita

$$\ddot{y}_4 + 8\dot{y}_4 + 12y_4 = -2\dot{u}_4$$

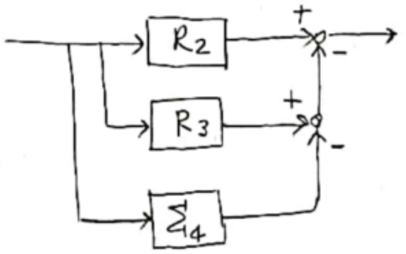
a) Determinare, motivando adeguatamente, per quali valori del parametro reale *p* il sistema aggregato risulta asintoticamente stabile, discutendo anche l'eventuale esistenza di oscillazioni (infinite) nelle risposte a ingresso costante.

b) Per i valori di *p* per cui il sistema è asintoticamente stabile, determinare tutte le costanti di tempo e il tempo di risposta.

c) Discutere la stabilità del sistema aggregato nel caso in cui il modello ingresso/uscita del sistema Σ_4 venga sostituito dal seguente: $\dddot{y}_4 + \ddot{y}_4 + 8\dot{y}_4 + 12y_4 = -2\dot{u}_4$

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)



$$R_1 = \frac{G_1}{1+G_1}$$

$$R_2 = \frac{R_1}{1+R_1 G_2}$$

$$R_3 = \frac{G_3}{1+G_3}$$

$\Sigma = R_2 // R_3 // \Sigma_4$ è A.S. $\Longleftrightarrow$ R_2, R_3 e Σ_4 sono A.S.

$$R_1 = \frac{\frac{6}{s-1}}{1+\frac{6}{s-1}} = \frac{6}{s+5}$$

$$R_2 = \frac{\frac{6}{s+5}}{1+\frac{6}{s+5}\cdot\frac{1}{s}} = \frac{6s}{s^2+5s+6} = \frac{6s}{(s+2)(s+3)} \qquad \begin{matrix}\lambda_1=-2\\ \lambda_2=-3\end{matrix} \quad , R_2 \text{ è A.S.}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = px_1+x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1+px_2+u \\ y=x_1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}(s-p)x_1 = x_2 \\ (s-p)x_2 = 2x_1+u \\ y=x_1\end{cases} \qquad [\cdot(s-p)$$

$$(s-p)^2 y = 2y+u \rightarrow (s^2-2ps+p^2-2)y = u \rightarrow G_3 = \frac{1}{s^2-2ps+p^2-2}$$

$$R_3 = \frac{\frac{1}{s^2-2ps+p^2-2}}{1+\frac{1}{s^2-2ps+p^2-2}} = \frac{1}{s^2-2ps+p^2-1} \qquad \begin{matrix}\lambda_1=p+1\\ \lambda_2=p-1\end{matrix}$$

$$\begin{cases}-2p>0 \\ p^2-1>0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}p<0 \\ p<-1 \vee p>1\end{cases} \Rightarrow p<-1 \qquad R_3 \text{ è A.S.}$$

$$\Sigma_4: \ (s^2+8s+12)y_4 = -2su_4$$

$$(s+6)(s+2)=0 \qquad \lambda_1=-2 \quad \lambda_2=-6 \qquad \Sigma_4 \text{ è A.S}$$

Quindi Σ è A.S. per $p<-1$

$\{\lambda\} = \{-2, -3, -2, -6, p+1, p-1\}$ $\quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \rightarrow \nexists$ oscillazioni

b) $\{T_i\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{p+1}, -\frac{1}{p-1}\}$

- $\begin{cases}p<-1 \\ p+1>-2\end{cases}$ $\quad -3<p<-1 \quad$ $\lambda_D = p+1$, $T_D = -\frac{1}{p+1}$ $\quad T_R = -\frac{5}{p+1}$

- $p \le -3 \quad \lambda_D = -2 \quad T_D = \frac{1}{2} \quad T_R = \frac{5}{2}$

c) $\Sigma_4: \ (s^3+s^2+8s+12)y_4 = -2su_4$

$\downarrow$ HURWITZ $n=3$

$\alpha_1 = 1$
$\alpha_2 = 8$
$\alpha_3 = 12$

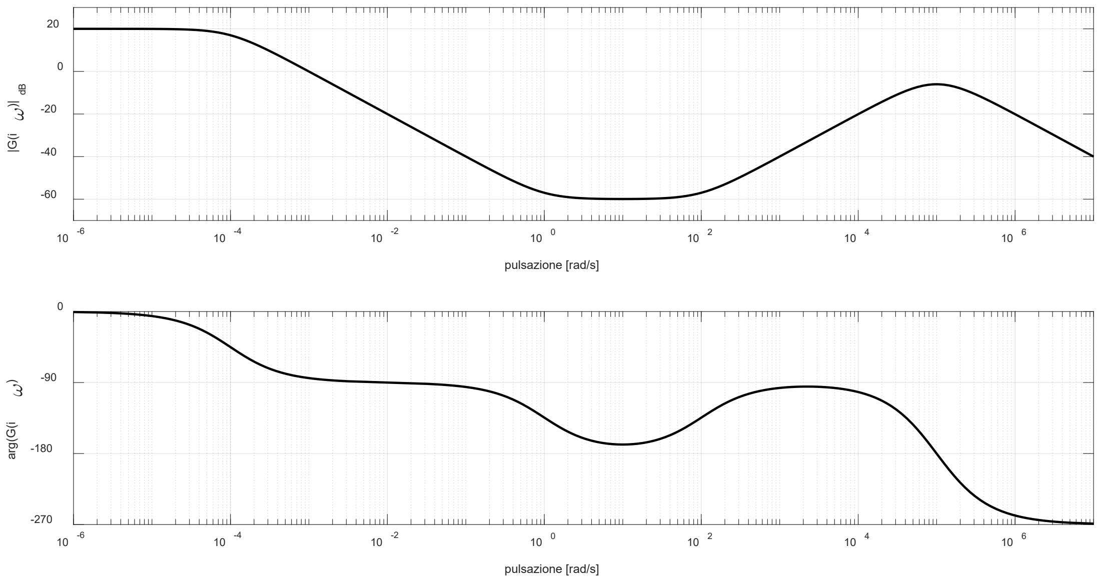
$\alpha_i > 0 \ \forall i$

$\alpha_1\alpha_2 = 8 \not> \alpha_3 = 12 \rightarrow \Sigma_4$ NON A.S.

$\downarrow$

Σ NON A.S.

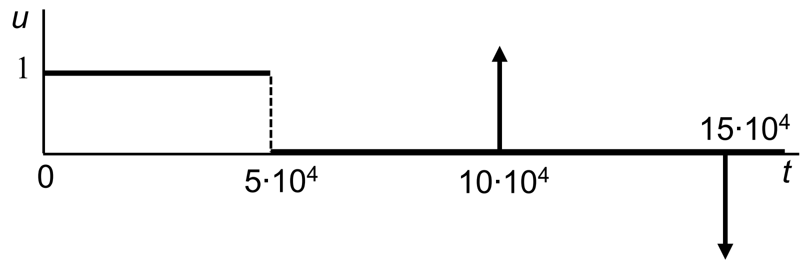
3)
Il seguente diagramma di Bode del modulo e della fase, relativo ad un sistema asintoticamente stabile, è stato ricavato sperimentalmente.



Si sa inoltre che il sistema, se sottoposto a ingresso costante, non presenta oscillazioni (infinite) nel suo movimento.

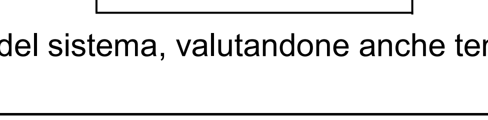
a) Determinare una funzione di trasferimento G(s) compatibile con tutte le informazioni.

b) Determinare (in modo qualitativo) la risposta del sistema all'ingresso rappresentato nella figura seguente (la linea verticale con freccia verso l'alto (basso) simboleggia un impulso unitario positivo (negativo)).



c) Determinare in modo esatto (teorema della risposta a ingresso sinusoidale) e approssimato (diagramma di Bode approssimato) l'ampiezza dell'uscita a regime quando il sistema è sottoposto a ingresso $u(t) = 2 \text{ sen } (10^5 t)$, giustificando il risultato ottenuto.

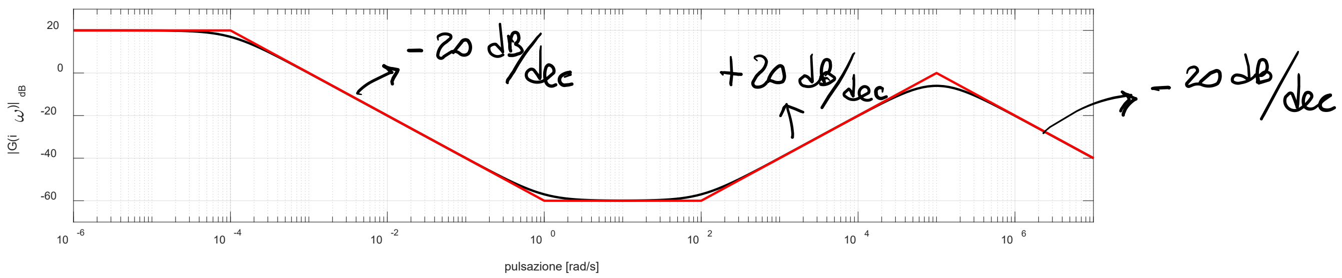
Infine, con riferimento al sistema in figura:

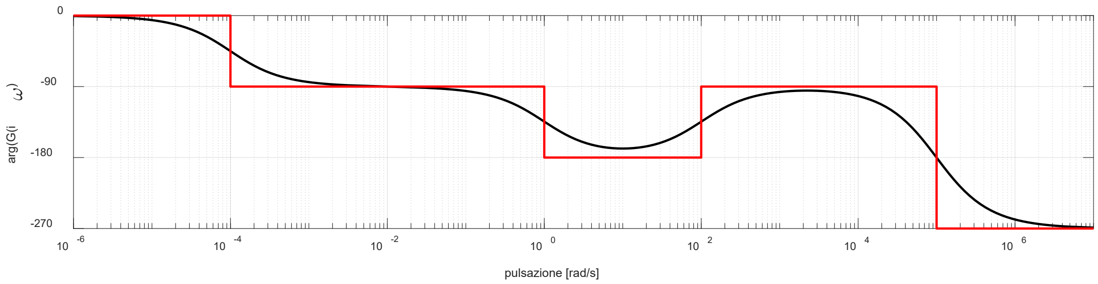


d) Si verifichi la stabilità del sistema, valutandone anche tempo di risposta e banda passante.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

Dai diagrammi dati ricavo i diagrammi approssimati di modulo e fase (in rosso nella figura seguente)





a) |zeri| in 10^0, 10^2

|poli| in 10^{-4}, 10^5, 10^5

zeri in $+10^0$ e -10^2

poli in -10^{-4}, -10^5 e -10^5

$|\mu|_{dB} = 20$ dB e $\angle G(i\omega) \underset{\omega \to \infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \mu = 10$

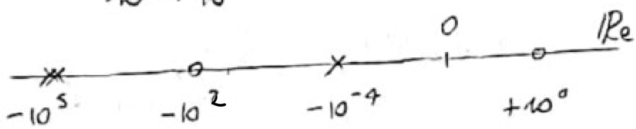
$$G(s) = 10 \frac{(1-s)(1+10^{-2}s)}{(1+10^{4}s)(1+10^{-5}s)^2}$$

b) $p_D = -10^{-4} \to T_D = 10^4 \to T_R = 5 \cdot 10^4$

Risposta a scalino

$r = 1$ $\quad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = -\frac{10 \cdot 10^{-2}}{10^4 \cdot 10^{-10}} = -10^5$

$y_\infty = G(0) = 10$

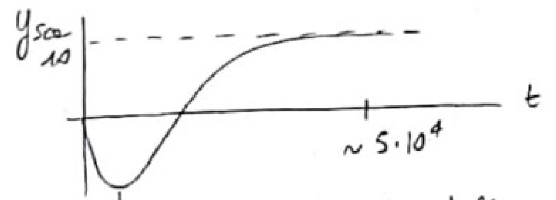


$m_s = 1$

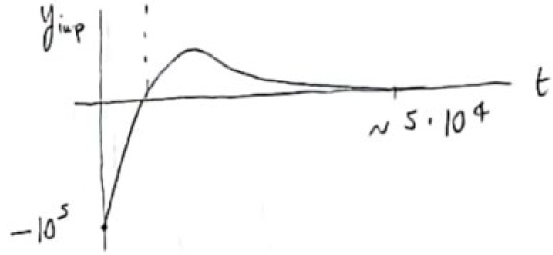
$\delta = 0$

↓

$N = 1$



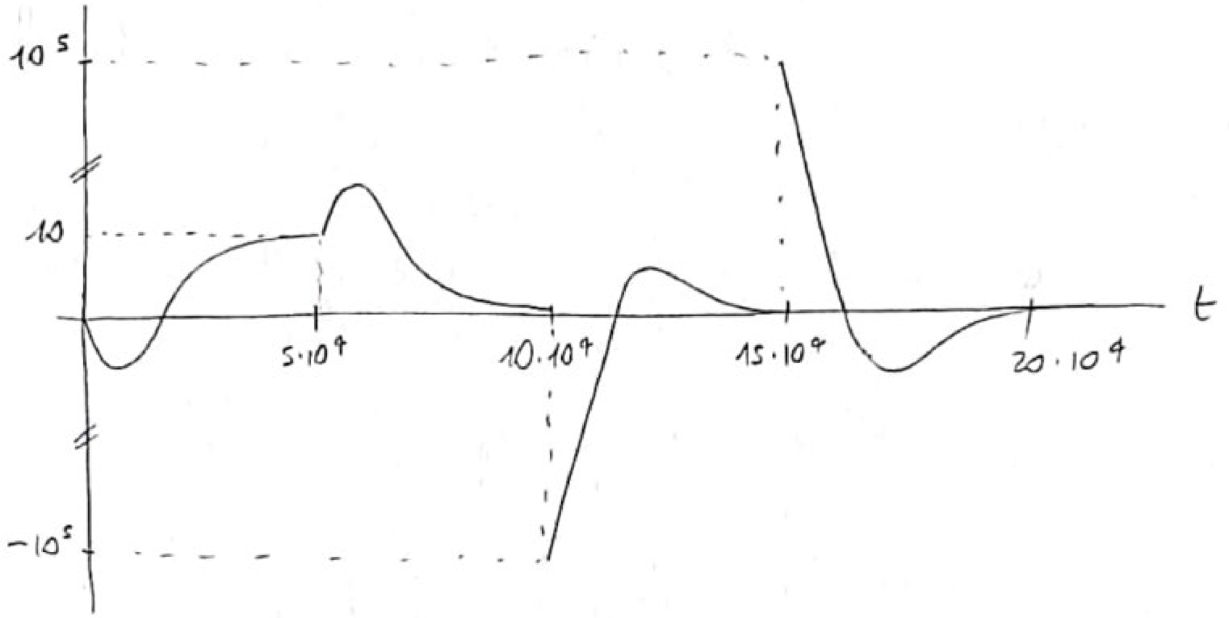
Risposta a impulso = derivata della risposta a scalino



$$u(t) = sca(t) - sca(t - 5\cdot 10^4) + imp(t - 10\cdot 10^4) - imp(t - 15\cdot 10^4)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = y_{sca}(t) - y_{sca}(t - 5\cdot 10^4) + y_{imp}(t - 10\cdot 10^4) - y_{imp}(t - 15\cdot 10^4)$$



c) $Y = 2\,|G(10^5 i)|$

APPROX $\rightarrow |G(10^5 i)|_{dB} = 0\ dB \rightarrow |G(10^5 i)| = 1$ $\qquad Y_{APPROX} = 2$

ESATTO $\rightarrow |G(10^5 i)| = 10 \dfrac{|1-10^5 i|\,|1+10^3 i|}{|1+10^9 i|\,|1+i|^2} \simeq \dfrac{10\cdot 10^5\cdot 10^3}{10^9(\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad Y_{ESATTO} = 1$

$Y_{ESATTO} \neq Y_{APPROX}$ perché in $\omega = 10^5$ ci sono due poli

d) $G = L \qquad \omega_c = 10^{-3} \qquad \varphi_c = -\pi/2 \qquad \varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi/2$

L propria
L non ha poli a $\mathrm{Re} > 0$
$|L|_{dB} \cap ! \; 0 \, dB$

$\xrightarrow{\text{BODE}} \begin{cases} \mu = 10 > 0 \\ \varphi_m = \pi/2 > 0 \end{cases} \rightarrow$ A.S.

$BP = (0, \omega_c) = (0, 10^{-3})$

$T_R = \dfrac{5}{\omega_c} = \dfrac{5}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^3$

4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) A un sistema lineare asintoticamente stabile è applicato l'ingresso $u(t) = -10 + 2\sin(3t)$. A transitorio esaurito, quale funzione di uscita $y(t)$ non è ammissibile?

[1] $-10 + 2\sin(3t)$
[2] $\sin(3t)$
~~[3]~~ $10 + \sin(t)$

b) Il sistema lineare a tempo continuo $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ha autovalori $\{-i0.5\ , 0\ , i0.5\}$. Il movimento libero

[1] diverge, per almeno uno stato iniziale
~~[2]~~ è limitato, per ogni stato iniziale
[3] tende a zero, per ogni stato iniziale

c) Un sistema lineare, completamente osservabile, è (internamente) instabile ma esternamente stabile. Applicando un ingresso $u(t)$ sinusoidale, l'uscita $y(t)$

[1] è limitata, qualunque sia $x(0)$
~~[2]~~ è limitata, se $x(0) = 0$
[3] è illimitata, qualunque sia $x(0)$

d) Dato il sistema lineare (A, b, c, d), il polo p_i della sua funzione di trasferimento $G(s)$

~~[1]~~ è sempre un autovalore di A
[2] è un autovalore di A se e solo se il sistema è completamente ragg. e osserv.
[3] è un autovalore di A solo se il sistema è compl. raggiungibile o compl. osserv.

a) [3] frequenza uscita $\neq$ frequenza ingresso
b) [2] dalla def. di sistema semplicemente stabile
c) [2] dalla def. di stab. esterna ; se $x(0) \neq 0$, la parte (NR, O) potrebbe divergere e con essa $y(t)$
d) [1] $\{\text{autovalori}\} \supseteq \{\text{poli}\}$, per qualunque sistema

5)
Si fornisca la definizione di sistema stabilizzabile, discutendo poi sotto quali condizioni (sufficienti e/o necessarie) un sistema risulta stabilizzabile.

Si proponga poi un esempio numerico di sistema di ordine $n = 2$ che sia NON stabilizzabile, dimostrando tale proprietà in base a quanto sopra enunciato.

6)
Sia dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad c = [1 \quad -1 \quad 0] \qquad d = 0$$

Scrivere i comandi Matlab per studiarne la completa osservabilità.

Scrivere quindi i comandi per determinare un ricostruttore dello stato che annulli l'errore di ricostruzione in tempo finito.

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

5) (A,b) è stabilizzabile se ammette una legge di controllo stabilizzante, cioè se $\exists K$ tale che $(A+bK)$ è asintoticamente stabile.

(A,b) completamente raggiungibile $\Rightarrow$ (A,b) stabilizzabile

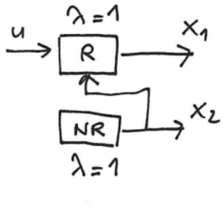
(A,b) NON completamente raggiungibile:

(A,b) stabilizzabile $\Leftrightarrow$ la parte NON RAGGIUNGIBILE è asintoticamente stabile

Esempio: $\dot{x} = Ax + bu$, $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$

$R = |b \quad Ab| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, sistema NON compl. raggiungibile, già scomposto in parti

$\left(X_R = \text{span}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix},\ X_{NR} = \text{span}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}\right)$



parte NON raggiungibile INSTABILE
$\Rightarrow$ (A,b) NON stabilizzabile

6)
```
A=[0 -1 0; 3 1 -1; 2 0 -1]
c=[1 -1 0]
O=obsv(A,c)
det(O)
autoval=[0 0 0]
l=acker(A',-c',autoval)
```