POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 7/2/2023

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
7	7	7	4	5	2		32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

In una popolazione di insetti ciascun individuo vive esattamente 3 settimane, dopodiché si riproduce (deponendo in media f uova) subito prima di morire. Le probabilità di sopravvivenza nelle 3 settimane di vita valgono: $s_0 = 0.001$, $s_1 = s_2 = 0.1$.

a) Descrivere la popolazione con un modello a classi d'età.
b) Discutere la stabilità del sistema al variare di $f > 0$.
c) Nel caso di asintotica stabilità, discutere il tempo di estinzione della popolazione e l'esistenza di oscillazioni nel movimento libero.
d) Introdurre nel modello una variabile d'ingresso che descriva l'immissione di uova dall'esterno e una variabile di uscita che rappresenti il numero di insetti della 3° classe d'età.
e) Determinare la funzione di trasferimento.
f) Utilizzando la funzione di trasferimento, determinare il numero di insetti della 3° classe d'età a regime se $u(t) = \bar{u} = 10^6$ e $f = 10^3$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

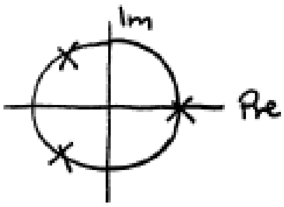
a) $x_i(t)$ = n. individui che compiono i settimane all'istante t
($i = 1, 2, 3$)

$$x_1(t+1) = 10^{-3} f\, x_3(t)$$
$$x_2(t+1) = 0.1\, x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = 0.1\, x_2(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10^{-3} f \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -10^{-3} f \\ -0.1 & \lambda & 0 \\ 0 & -0.1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 10^{-5} f$$

$$\lambda^3 = 10^{-5} f$$



I tre autovalori hanno modulo $|\lambda| = \sqrt[3]{10^{-5} f}$

$$|\lambda| < 1 \iff 10^{-5} f < 1 \iff f < 10^5$$

A asintoticamente stabile $\iff f < 10^5$
A semplicemente stabile $\iff f = 10^5$
[i tre autovalori sono radici semplici di $\Delta_A(\lambda)$]
A instabile $\iff f > 10^5$

c) $$T_D = -\frac{1}{\ln \sqrt[3]{10^{-5} f}}$$, tempo di estinzione $\simeq 5\, T_D$

$\exists$ autovalori complessi $\Rightarrow$ $\exists$ oscillazioni

d) $$x_1(t+1) = 10^{-3} f \cdot (x_3(t)) + 10^{-3} u(t)$$
$\vdots$
$$y(t) = x_3(t)$$

$$A = [\;\cdots\;] \qquad b = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $$z X_1 = 10^{-3} f X_3 + 10^{-3} u$$
$$z X_2 = 0.1\, X_1$$
$$z X_3 = 0.1\, X_2$$
$$y = X_3$$

$$\rightsquigarrow \quad y = G(z)\, u = \frac{10^{-5}}{z^3 - 10^{-5} f}\, u$$

f) $$\bar{y} = G(1)\, \bar{u} = \frac{10^{-5}}{1 - 10^{-5} \cdot 10^3}\, 10^6 = \frac{10}{0.99}$$

2)
Si consideri il seguente sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2$$
$$y = x_1$$

a) Verificare che è instabile e dire perché sia possibile stabilizzarlo mediante un regolatore lineare.
b) Progettare un regolatore lineare tale che l'errore di stima dello stato tenda a zero in circa 5 unità di tempo e che il sistema regolato abbia un tempo di risposta complessivo circa pari a 10 unità di tempo.
c) Verificare infine se è possibile stabilizzare il sistema applicando come ingresso una retroazione statica dall'uscita.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = b$

$-c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$

$tr(A) = 1 > 0 \longrightarrow INST$

$R = |b \;\; Ab| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad det(R) \neq 0 \longrightarrow CR$

$\theta = \begin{vmatrix} c \\ -CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad det(\theta) \neq 0 \longrightarrow C\theta$

$CR + C\theta \Rightarrow$ posso fissare a piacere λ_i^* di $A+bk$ e di $A+lc$
Scegliendo $\mathbb{R}e(\lambda_i^*) < 0$, essendo
$\{\lambda\}_{REG} = \{\lambda_i^*\}_{A+bk} \cup \{\lambda_i^*\}_{A+lc}$, posso stabilizzare

b) Errore di stima $T_R = 5 \Rightarrow T_D = 1 \Rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_D) = -1$
$\hookrightarrow$ di $A+lc$

$\lambda_1^* = \lambda_2^* = -1$

$A + lc = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+l_1 & 1 \\ -1+l_2 & 2 \end{vmatrix}$

$tr(A+lc) = \lambda_1^* + \lambda_2^* \longrightarrow 1 + l_1 = -2$

$det(A+lc) = \lambda_1^* \cdot \lambda_2^* \longrightarrow -2 + 2l_1 + 1 - l_2 = 1$

$l = \begin{vmatrix} -3 \\ -8 \end{vmatrix}$

Sistema regolato $T_R = 10 \Rightarrow T_D = 2 \Rightarrow \mathbb{R}e(\lambda_D) = -\frac{1}{2}$
$\hookrightarrow$ di $A+bk$

$\lambda_1^* = \lambda_2^* = -1/2$

$A + bk = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1+k_1 & 1+k_2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

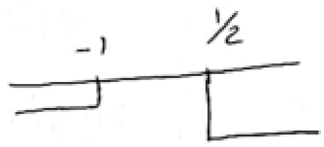
$$tr(A+bk) = \lambda_1^* + \lambda_2^* \longrightarrow 1 + k_1 = -1$$
$$det(A+bk) = \lambda_1^* \lambda_2^* \longrightarrow -2 + 2k_1 + 1 + k_2 = \frac{1}{4}$$
$$k = \begin{vmatrix} -2 & \frac{21}{4} \end{vmatrix}$$

c) $u = \alpha y = \alpha x_1$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + \alpha x_1$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2$$

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} -1+\alpha & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

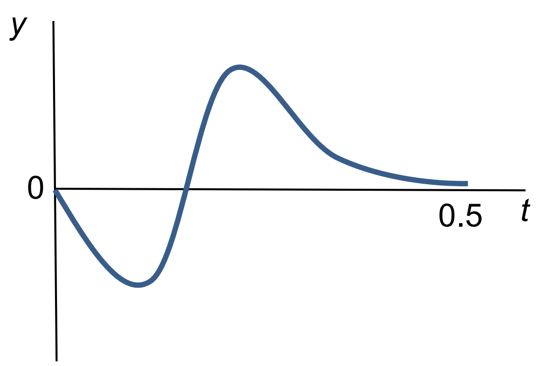
$$tr(\tilde{A}) = 1 + \alpha < 0 \qquad \alpha < -1$$
$$det(\tilde{A}) = 2\alpha - 1 > 0 \longrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$$



$\nexists\, \alpha$

3)

La risposta a scalino unitario rilevata sperimentalmente su un sistema è quella riportata in figura.



Si sono inoltre effettuate tre rivelazioni sperimentali applicando l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \sin(\omega t)$$

misurando il rapporto tra l'ampiezza dell'uscita Y e l'ampiezza dell'ingresso U a regime. I risultati sono riportati in tabella.

ω	0.01	1	100
Y/U	0.001	1	10

a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con le prove sperimentali, tracciandone i diagrammi di Bode approssimati di modulo e fase.

b) Determinare, in modo qualitativo, e rappresentare graficamente la risposta all'impulso del sistema.

c) Determinare (anche in modo approssimato) l'uscita a regime corrispondente al segnale di ingresso $u(t) = 3 \sin(0.1t)$.

Soluzione [proseguire sul retro]:

a) Dalla risposta a scalino:

$y_\infty = 0 \to$ G ha almeno uno zero nell'origine

$T_R = 0.5 \to T_D = 0,1 \to \mathrm{Re}(p_D) = -10$

$\nexists$ oscillazioni $\rightsquigarrow p_i \in \mathbb{R}$

2 estremi $\to m_s = 2 \quad \delta = 0$ (per esempio!)

$\dot{y}(0) < 0 \to$ zero instabile

$\to r = 1$

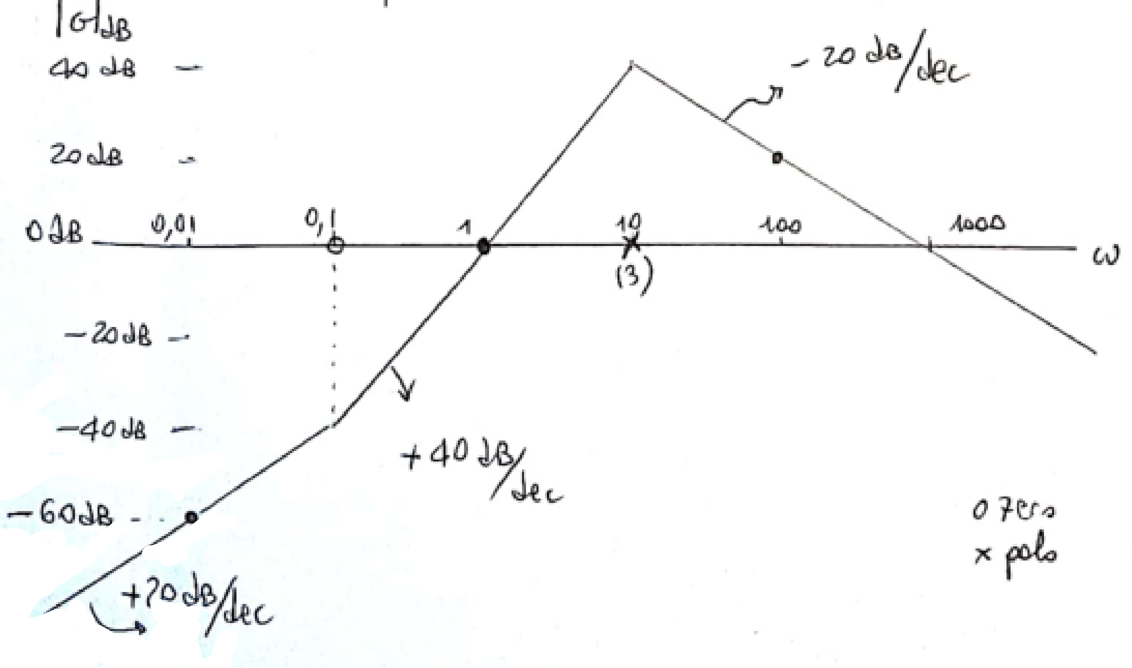
Una possibile G(s) è quindi: $\mu s \dfrac{1 - s\tau}{(1 + sT)^3}$

con $\mu, \tau, T > 0$

$T = 0,1 \rightsquigarrow |p| = 10$

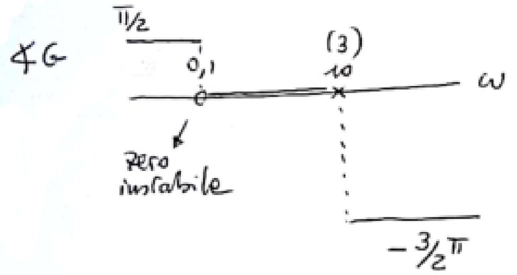
Dalle prove in regime sinusoidale:

ω	0,01	1	100
$Y/U = \lvert G(i\omega) \rvert$	0,001	1	10
$\lvert G(i\omega) \rvert_{dB}$	−60 dB	0 dB	20 dB



$$\mu_{dB} = -20\,dB \rightarrow \mu = 0{,}1$$

$$G(s) = 0{,}1\, s\, \frac{1-10s}{(1+0{,}1s)^3}$$



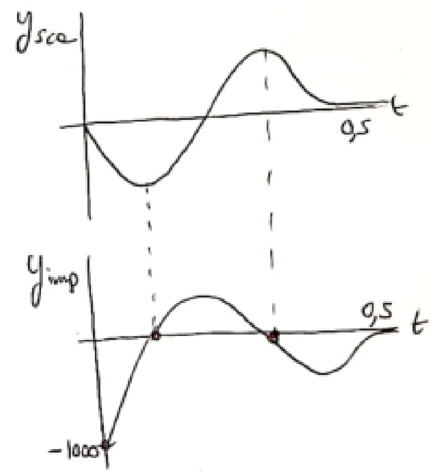
b) $y_{imp}(t) = \dfrac{d\, y_{sca}(t)}{dt}$

con $y_{sca}(0) = 0$

$$y_{imp}(0) = \dot{y}_{sca}(0) = -\frac{10 \cdot 0{,}1}{0{,}1^3}$$

$\downarrow$

-1000



c) $y(t) = 3\,|G(0{,}1i)|\,\mathrm{sen}\left(0{,}1t + ∡G(0{,}1)\right)$

$|G(0{,}1i)|_{dB} = -40\,dB \rightarrow |G(0{,}1i)| = 0{,}01$

$∡G(0{,}1i) \simeq +\pi/4$

$$y(t) = 0{,}03\,\mathrm{sen}\left(0{,}1t + \pi/4\right)$$

4)

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione. (risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) Il sistema non lineare a tempo discreto $x(t+1) = f(x(t))$ ha un equilibrio il cui jacobiano ha autovalori $\{0.5\,, 0.5 + i0.5\,, 0.5 - i0.5\}$. L'equilibrio

[1] è asintoticamente stabile
[2] è stabile ma non asintoticamente stabile
[3] è instabile

b) Il sistema lineare a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$ ha autovalori $\{-0.5\,, 0\,, 0.5\}$. Il movimento libero

[1] diverge, per almeno qualche stato iniziale
[2] tende a zero, per almeno qualche stato iniziale
[3] tende a zero, per ogni stato iniziale

c) Condizione sufficiente affinché il sistema lineare (A, b) sia stabilizzabile è che

[1] sia instabile
[2] sia completamente raggiungibile
[3] la parte non osservabile sia asintoticamente stabile

d) Il test di Hurwitz permette di verificare

[1] la completa raggiungibilità e osservabilità di un sistema a tempo continuo
[2] la stabilità asintotica di un sistema a tempo discreto
[3] la stabilità asintotica di un sistema a tempo continuo

4) a) [1] $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ Jacobiano asint. stabile
$\Rightarrow \bar{x}$ asint. stabile

b) [3] $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow A$ asint. stabile
$\Rightarrow x_{lib}(t) \to 0 \quad \forall x_{lib}(0)$

c) [2] compl. ragg $\Rightarrow$ stabilizzabile

d) [3]

5)
Si consideri il sistema lineare $\dot{x} = Ax$ di ordine $n = 2$. Di ciascuna delle due quantità $tr(A)$ e $det(A)$ (traccia e determinante di A) sappiamo solo se è positiva, negativa o nulla. Discutere cosa è possibile dedurre a proposito della stabilità del sistema (asintotica stabilità, semplice stabilità, o instabilità).
(Suggerimento: organizzare i risultati in una tabella contenente i 3x3 casi).

Inoltre, si proponga un esempio numerico di sistema $\dot{x} = Ax$ di ordine $n = 2$ semplicemente stabile, dimostrandone la semplice stabilità mediante quanto discusso in precedenza (traccia e determinante).

6)
Sia dato un sistema di controllo con retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = 0.1\frac{1 - s}{(1 + 0.1s)(0.1 + s)^2}$$

Quali comandi occorre digitare in Matlab per valutarne la pulsazione critica e il margine di fase?

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

5)

	$\det A < 0$	$\det A = 0$	$\det A > 0$
$trA < 0$	instabile	sempl. st.	asint. st.
$trA = 0$	instabile	sempl. st. o (dob.) inst.	sempl. st.
$trA > 0$	instabile	instabile	instabile

Esempio: $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $\quad trA = -1 < 0$, $\det A = 0$ $\Rightarrow$ semplicem. stabile

6)
```
>> NUM=0.1*[-1 1];
>> DEN=conv([0.1 1],conv([1 0.1],[1 0.1]));
>> SISTEMA=tf(NUM,DEN);
>> [Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(SISTEMA)
```

dove Pm = margine di fase
Wcp = pulsazione critica