POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 9/1/2023

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

In un'azienda manifatturiera, la produzione è ripartita su un elevato numero di macchine tra loro uguali. Sono note le probabilità che una macchina incorra in un guasto nel corso di un anno, in relazione alla sua età.

età	da 0 a 1 anno	da 1 a 2 anni	da 2 a 3 anni	da 3 a 4 anni
Prob. guasto	0	0.1	0.2	0.3

In caso di guasto, la macchina viene eliminata poiché la riparazione non è conveniente. Ogni macchina viene comunque eliminata al compimento del quarto anno di attività, in quanto obsoleta.

a) Descrivere l'evoluzione nel tempo dell'insieme delle macchine mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $u(t)$ indichi il numero di nuove macchine acquistate e $y(t)$ il totale di macchine in servizio.
b) Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.
c) Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
d) Si ipotizzi ora che l'attività di ciascuna macchina frutti un profitto annuo p e che il costo per l'acquisto di una nuova macchina sia c. Modificare il modello precedente, assumendo che l'azienda spenda ogni anno per l'acquisto di nuovi macchinari esattamente la frazione $0 < \alpha < 1$ del profitto ottenuto.
e) Studiare la stabilità del sistema ottenuto al punto c), ponendo $c = p$ e $\alpha = 0.1$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

1)

a) $x_i(t)$, $i=1,2,3,4$: n° macchine in servizio da i anni all'istante t

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= (1-g_1)u(t) = u(t)\\
x_2(t+1) &= (1-g_2)x_1(t) = 0.9x_1(t)\\
x_3(t+1) &= (1-g_3)x_2(t) = 0.8x_2(t)\\
x_4(t+1) &= (1-\underbrace{g_4}_{\text{prob. guasto}})x_3(t) = 0.7x_3(t)
\end{aligned}
$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

b) $$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{vmatrix}$$

$\sigma(A) = \{0,0,0,0\}$ $|\lambda_i|<1$ $\forall i$ $\Longrightarrow$ ASINTOT. STABILE

sistema a memoria finita : $T_R \leq n = 4$

λ_i reali non negativi $\Longrightarrow$ $\nexists$ oscillazioni.

c) $$\left.\begin{aligned} zx_1 &= u\\ zx_2 &= 0.9x_1\\ zx_3 &= 0.8x_2\\ zx_4 &= 0.7x_3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y = \left[\frac{1}{z} + \frac{0.9}{z^2} + \frac{0.9\times 0.8}{z^3} + \frac{0.9\times 0.8\times 0.7}{z^4}\right] u$$

$$G(z) = \frac{z^3 + 0.9z^2 + 0.72z + 0.504}{z^4}$$

d) Cambia solo la 1ª equazione :

$$x_1(t+1) = (1-g_1)\,\alpha\,\frac{P}{C}\left(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)\right)$$

e) $$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

A è una matrice NON NEGATIVA.

λ_D = aut. dominante è REALE ≥ 0

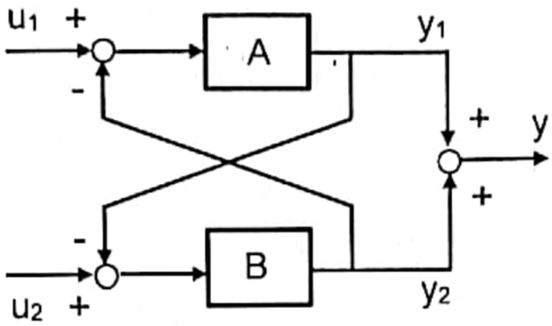
$0.4 < \lambda_D \leq 0.9$

min e max somma di riga

$\lambda_D < 1 \Longrightarrow$ ASINT. STABILE

2)

Si consideri il sistema in figura, in cui $A(s) = -\frac{2}{s+5}$ e $B(s) = \frac{1}{s+2}$.



a) Determinare le funzioni di trasferimento tra u_1 e y e tra u_2 e y, studiandone poi la stabilità. (Suggerimento: ricavare prima y1 e y2 in funzione degli ingressi u1 e u2 e poi y come somma di y1 e y2)

Tracciare l'andamento qualitativo dell'uscita a fronte dei segnali di ingresso

b) $u_1(t) = sca(t) \quad u_2(t) = 0$
c) $u_1(t) = 0 \quad u_2(t) = imp(t)$
d) $u_1(t) = 6sca(t) \quad u_2(t) = imp(t-2)$

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

a) $y_1 = A(u_1 - y_2) = A\left(u_1 - B(u_2 - y_1)\right) = Au_1 - AB\,u_2 + AB\,y_1$

$$y_1 = \frac{A}{1-AB}u_1 - \frac{AB}{1-AB}u_2$$

$y_2 = B(u_2 - y_1) = B\left(u_2 - A(u_1 - y_2)\right) = Bu_2 - AB\,u_1 + AB\,y_2$

$$y_2 = -\frac{AB}{1-AB}u_1 + \frac{B}{1-AB}u_2$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{A(1-B)}{1-AB}u_1 + \frac{B(1-A)}{1-AB}u_2$$

$u_1 \to y \qquad G_1 = \frac{A(1-B)}{1-AB} = \frac{-2(s+1)}{s^2+7s+12}$

$u_2 \to y \qquad G_2 = \frac{B(1-A)}{1-AB} = \frac{s+7}{s^2+7s+12}$

poli G_1 = poli G_2 $\rightarrow$ $s^2+7s+12=(s+4)(s+3)=0$

$s=-4 \quad s=-3 \Rightarrow$ G_1 e G_2 EST. STAB ($\mathrm{Re}(\text{poli})<0$)

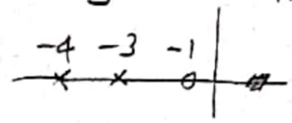
b) $\begin{cases} y = G_1 u_1 \\ G_1 = \dfrac{-2(s+1)}{s^2+7s+12} \\ u_1 = sca(t) \\ u_2 = 0 \end{cases}$

$r=1 \rightarrow y(0)=0 \quad \dot{y}(0)=-2$

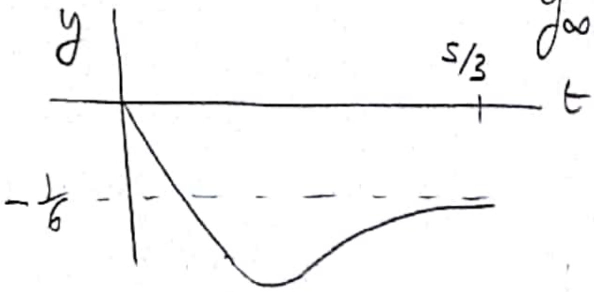
$p_i \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists$ osc. oscill

$p_D=-3 \quad T_D=\frac{1}{3} \quad T_R=\frac{5}{3}$

$y_\infty = G_1(0) = -\frac{1}{6}$



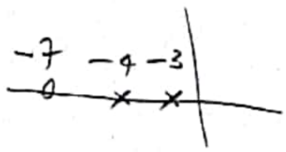
$m_S=1$
$\sigma=0$
$N=1$



c) $u_1=0 \quad u_2=imp(t)$

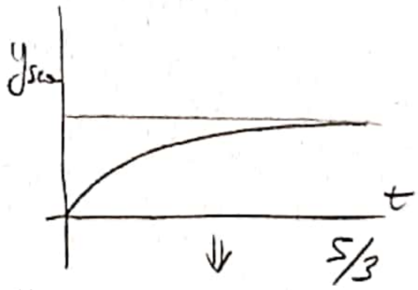
$y=G_2u_2 \quad G_2=\dfrac{s+7}{s^2+7s+12}$

$r=1 \quad y_{sca}(0)=0 \quad \dot{y}_{sca}(0)=1$

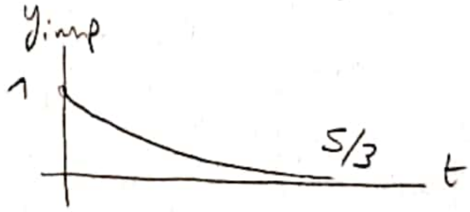


$m_S=0$

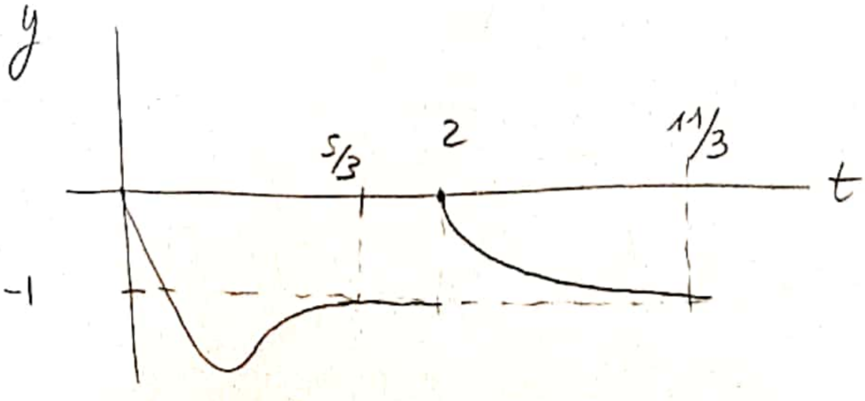
$N=0 \quad y_{sca}^{\infty}=\frac{7}{12}$



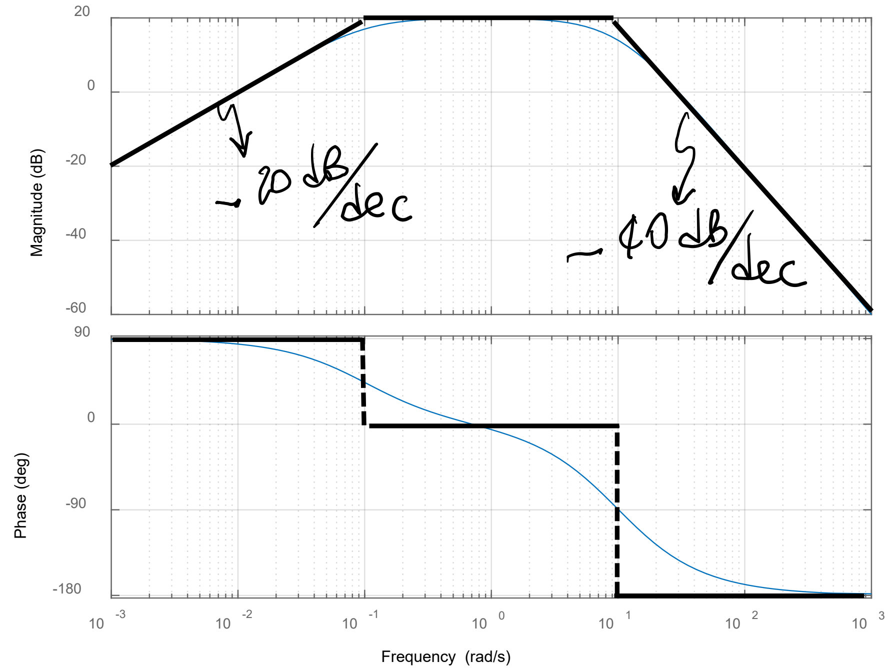
$\Downarrow$



d) $u_1=6\,sca(t) \quad u_2=-imp(t-2)$



3)
Mediante una serie di esperimenti su un sistema esternamente stabile, si sono ricavati i diagrammi di Bode (modulo e fase) riportati in figura.



Si sa inoltre che nella risposta a scalino del sistema non sono previste oscillazioni.

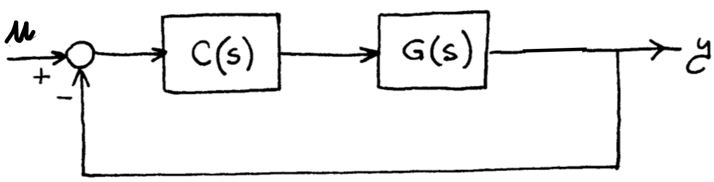
a) Utilizzando esclusivamente i diagrammi sopra riportati, calcolare l'uscita a transitorio esaurito quando il segnale di ingresso è pari a

$$u(t) = 1 + 2sen(0.001t)$$

specificando, inoltre, il tempo necessario affinché tale comportamento venga raggiunto.

b) Determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

Per rendere il segnale di uscita prossimo a quello di ingresso, si supponga che il sistema dato faccia parte dello schema di controllo riportato in figura, in cui $C(s) = \frac{\mu}{s}$



c) Determinare μ in modo che il sistema di controllo sia asintoticamente stabile e con un margine di fase di circa 90°, determinandone inoltre il tempo di risposta e il valore massimo dell'uscita a transitorio esaurito quando il segnale di ingresso è quello del punto a).

Soluzione [proseguire sul retro]:

a) $y_{\infty}(t) = 1 \cdot G(0) + 2|G(0{,}001i)|\, sen(0{,}001t + \measuredangle G(0{,}001i))$

G ha uno zero nell'origine $\rightarrow G(0) = 0$

$|G(0{,}001i)|_{dB} = -20\ dB \rightarrow |G(0{,}001i)| = 0{,}1$

$\measuredangle G(0{,}001i) \simeq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow y_\infty(t) = 0{,}2\ \text{sen}\left(0{,}001t + \pi/2\right)$

$G(s)$ ha il polo dominante in $-0{,}1 \rightarrow T_D = \frac{1}{0{,}1} = 10$ e $T_R = 5T_D = 50$

b) zero nell'origine

$\mu_{dB} = 40\ dB$

poli in -10 -10 e $-0{,}1$

$$G(s) = \frac{100\,s}{(1+0{,}1s)^2(1+10s)}$$

c) $L = CG = \dfrac{100\,\mu}{(1+0{,}1s)^2(1+10s)}$

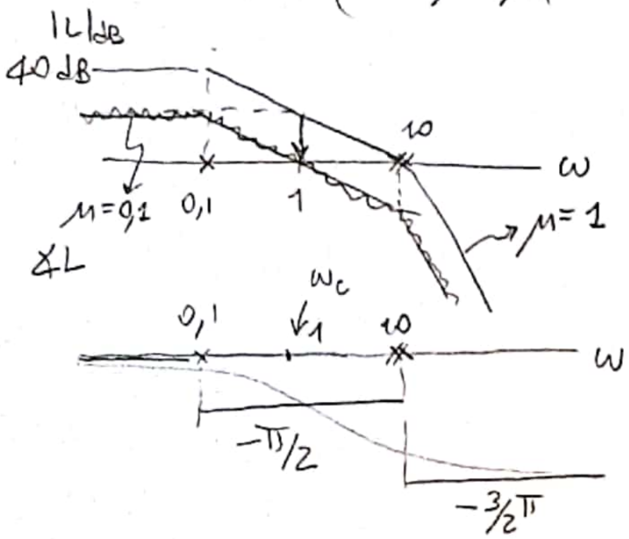
$\varphi_m = \pi - |\varphi_c| = \pi/2 \rightarrow \varphi_c = -\pi/2$

$\Downarrow$

$\omega_c = 1$

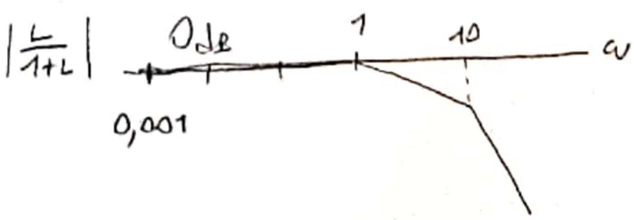
$\Downarrow$

$\mu = 0{,}1$



$T_R = \frac{5}{\omega_c} = 5$

$$y = \frac{L}{1+L}u \rightarrow y_\infty^{MAX} = 1\cdot\left|\frac{L}{1+L}\right|_{s=0} + 2\cdot\left|\frac{L}{1+L}\right|_{s=0{,}001i} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 3$$



4)

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) Si consideri un sistema lineare asintoticamente stabile. Senza altre informazioni, si può affermare che

[1] il sistema è completamente raggiungibile
[2] il sistema è esternamente stabile
[3] il sistema è rivelabile

b) Si consideri un sistema lineare completamente osservabile. Senza altre informazioni, si può affermare che

[1] il sistema è completamente raggiungibile
[2] il sistema è esternamente stabile
[3] il sistema è rivelabile

c) Il sistema lineare S è formato aggregando in parallelo i sistemi S_1 e S_2. Se S è asintoticamente stabile, allora

[1] almeno uno tra S_1 e S_2 è instabile
[2] S_1 e S_2 sono entrambi asintoticamente stabili
[3] solo uno tra S_1 e S_2 è asintoticamente stabile

d) Il movimento libero di un sistema lineare semplicemente stabile

[1] diverge per almeno uno stato iniziale
[2] tende a zero per ogni stato iniziale
[3] non tende a zero per almeno uno stato iniziale

4)

a) [2] Per ogni sistema lineare, asintotica stabilità $\Rightarrow$ esterna stabilità

b) [3] Per ogni sistema lineare, completa osservabilità $\Rightarrow$ rivelabilità

c) [2] $\sigma(S) = \sigma(S_1) \cup \sigma(S_2)$ per il collegamento parallelo, per cui se tutti gli autovalori di S hanno parte reale negativa (t.c.) o modulo minore di 1 (t.d.), lo stesso deve valere per gli autovalori di S_1 e S_2.

d) [3] In un sistema lineare semplicemente stabile, il movimento libero è limitato $\forall x(0)$ ma non converge a zero per almeno un $x(0)$.

5)
Il sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ ha un equilibrio $\bar{x}$ con matrice Jacobiana $A(\bar{x})$. Si dica cosa è possibile dedurre, a partire dalla matrice Jacobiana, sulla stabilità di $\bar{x}$.

Inoltre, si proponga un esempio di sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$ di ordine $n = 1$ che abbia un equilibrio instabile, dimostrandone l'instabilità mediante la matrice Jacobiana.

6)
Sia dato il sistema a tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

Scrivere i comandi Matlab per
a) verificarne l'instabilità;
b) verificarne la completa raggiungibilità;
c) determinare un possibile vettore k con il quale stabilizzare il sistema.

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

5)

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di $A(\bar{x})$. Allora:

i) $Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i \Rightarrow \bar{x}$ asintoticamente stabile

ii) $\exists i : Re(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ instabile

Esempio ("equazione logistica", vista a lezione):

$$\dot{x} = x(1-x)$$

$\bar{x} = 0$ è equilibrio, poiché $\dot{x}\big|_{x=0} = 0$. La matrice Jacobiana vale: $A(0) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 1 - 2x\Big|_{x=0} = 1$.

Poiché $\lambda = 1 > 0$, $\bar{x} = 0$ è instabile.

6) a) A=[1 0 2; 0 -2 1; 2 1 3]

eig(A)

b) b=[1 -2 2]'

R = ctrb(A, b)

det(R)

c) autoval = [-1 -2 -3]

k = acker(A, -b, autoval)