POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 7/9/2022

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

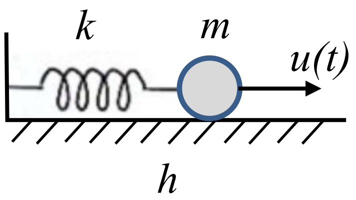
CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
7	7	7	4	5	2		32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

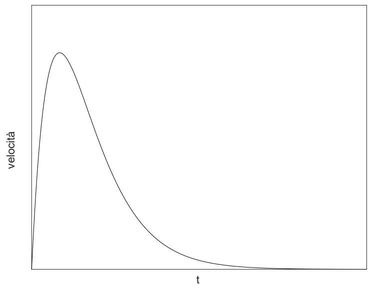
1)
Sul sistema meccanico in figura sono effettuate alcune prove per ricavarne il valore della massa *m*, della costante elastica della molla *k* e dell'attrito viscoso *h*.



Alcune prove consistono nell'applicare alla massa una forza di ingresso $u(t)$ sinusoidale di ampiezza unitaria con pulsazione ω e nel rilevare l'ampiezza Y della velocità $y(t)$ a transitorio esaurito della massa stessa. I risultati sono riportati in tabella:

ω	Y
0.01	0.1
10	10
1000	1

Infine, con un'ulteriore prova, viene valutata la velocità della massa *m* qualora venga sottoposta a una forza a scalino. Il risultato della prova è qualitativamente rappresentato in figura:



a) A partire dalle prove sperimentali, determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema meccanico.
b) Confrontando la $G(s)$ ricavata al punto precedente con quella ottenuta dalla scrittura del modello, determinare i parametri *m*, *k* e *h*.
c) Tracciare i diagrammi di Bode approssimati di modulo e fase del sistema ottenuto al punto precedente.
d) Dire infine se, a partire dalle misurazioni di $u(t)$ e $y(t)$, sia possibile ricostruire asintoticamente la posizione della massa del sistema.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

1)

a) Risposta a scalino $\rightarrow \nexists$ oscill $\rightarrow$ poli reali

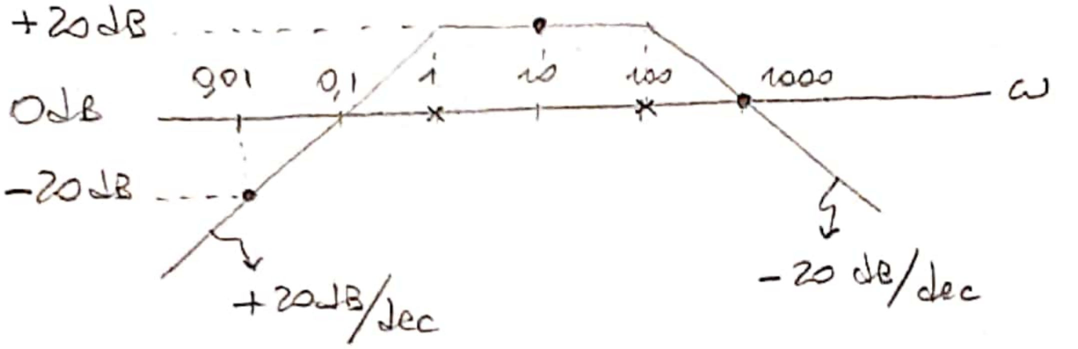
$Y = |G(i\omega)|\, U = |G(i\omega)|$

$U = 1$

ω	$\lvert G(i\omega)\rvert$	$\lvert G(i\omega)\rvert_{dB}$
0,01	0,1	-20 dB
10	10	$+20$ dB
1000	1	0 dB

$y_\infty = G(0)\cdot \bar{u} = 0 \rightarrow \exists$ zero nell'origine

$|G|_{dB}$



|poli| in 1 e 100

$|\mu|_{dB} = 20$ dB $\rightarrow \mu = 10$

$$G(s) = 10\,\frac{s}{(1+s)(1+0{,}01s)}$$

b) x_1 = posizione $\qquad \dot{x}_1 = x_2$

x_2 = velocità $\qquad \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(u - h x_2 - k x_1)$

$\qquad y = x_2$

$s X_1 = X_2$

$s X_2 = \frac{1}{m}(u - h x_2 - k x_1) \quad (\cdot s \rightarrow s^2 y = \frac{1}{m}(su - hsy - ky)$

$$\left(s^2 + \frac{h}{m}s + \frac{k}{m}\right) y = \frac{1}{m} s u \rightarrow G(s) = \frac{1}{m}\,\frac{s}{s^2 + \frac{h}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$G = 10 \frac{s}{(1+s)(1+0{,}01s)} = 1000 \frac{s}{(1+s)(100+s)} = 1000 \frac{s}{s^2+101s+100}$$

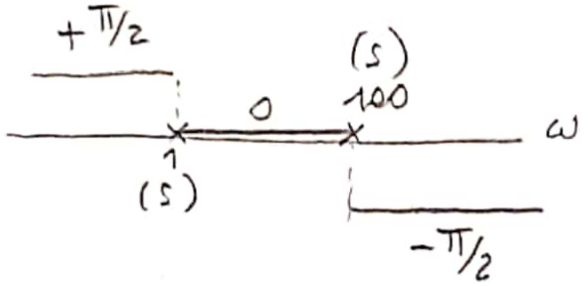
$$\frac{1}{m} = 1000 \qquad m = \frac{1}{1000}$$

$$\frac{h}{m} = 101 \quad \rightarrow \quad h = \frac{101}{1000}$$

$$\frac{k}{m} = 100 \qquad k = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$

c) $|G|_{dB}$ vedi pag precedente

$\angle G$



d) $n=2$

grado(den(G)) = 2 $\vdash\!\!\rightarrow$ Il sistema è CR e CO

Poiché CO $\Rightarrow$ è possibile ricostruire asintoticamente tutto lo stato (anche la posizione!) a partire dalle misure di u e y

2)
Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo continuo, il quale rappresenta l'interazione di tipo preda-predatore tra due specie:

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1) - \frac{x_1 x_2}{1 + x_1}$$
$$\dot{x}_2 = -p x_2 + \frac{x_1 x_2}{1 + x_1}$$

Si assuma $p > 0$.

a) Determinare, in funzione di p, tutti gli stati di equilibrio (x_1, x_2) limitandosi a quelli caratterizzati da $x_1, x_2 \geq 0$.
b) Determinare la matrice Jacobiana del sistema.
c) Mediante il metodo di linearizzazione, qualora applicabile, studiare la stabilità di tutti gli stati di equilibrio determinati al punto a) nei casi $p = 1/4$ e $p = 1/2$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

②

a) $$\dot{x}_1 = x_1\left(1 - x_1 - \frac{x_2}{1+x_1}\right)$$

$$\dot{x}_2 = x_2\left(-p + \frac{x_1}{1+x_1}\right)$$

I $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\exists\ \forall p$

II $\begin{cases} x_1 = 0 \\ -p + \dfrac{x_1}{1+x_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 0$, impossibile poiché $p > 0$ per ipotesi

III $\begin{cases} 1 - x_1 - \dfrac{x_2}{1+x_1} = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\exists\ \forall p$

IV $\begin{cases} 1 - x_1 - \dfrac{x_2}{1+x_1} = 0 \\ -p + \dfrac{x_1}{1+x_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{p}{1-p} \\ x_2 = \dfrac{1-2p}{(1-p)^2} \end{cases}$, $x_1, x_2 \geq 0$ se $0 < p \leq 1/2$

Riassumendo, gli stati di equilibrio sono:

$$x_A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \forall p>0; \quad x_B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \forall p>0;$$

$$x_C = \begin{vmatrix} \dfrac{p}{1-p} \\ \dfrac{1-2p}{(1-p)^2} \end{vmatrix}, \ 0 < p \leq 1/2$$

b) $A = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - 2x_1 - \frac{x_2}{(1+x_1)^2} & -\frac{x_1}{1+x_1} \\ \frac{x_2}{(1+x_1)^2} & -p+\frac{x_1}{1+x_1} \end{vmatrix}$

c) $x_A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -p \end{vmatrix}$ $\exists \lambda = 1 > 0 \ \forall p \Rightarrow$ A instabile forte $\forall p \Rightarrow$ x_A instabile $\forall p$

$x_B = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -p+\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$p = \frac{1}{4}$: $\sigma_A = \left\{-1, \frac{1}{4}\right\}$, $\exists \lambda > 0$, A instabile forte $\Rightarrow x_B$ instabile

$p = \frac{1}{2}$: $\sigma_A = \left\{-1, 0\right\}$, A semplic. stabile $\Rightarrow$ non è possibile concludere nulla sulla stabilità di x_B

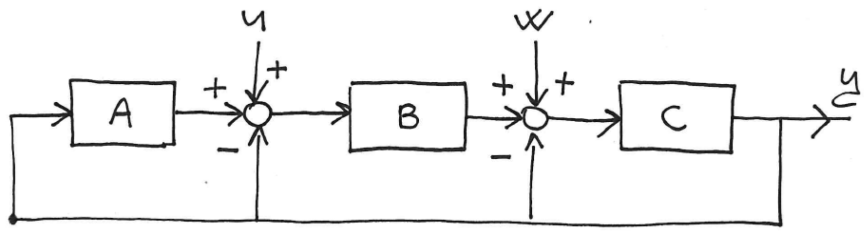
$x_C = \begin{vmatrix} \frac{p}{1-p} \\ \frac{1-2p}{(1-p)^2} \end{vmatrix}$: $p = \frac{1}{4}$: $x_C = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 8/9 \end{vmatrix}$

$p = \frac{1}{2}$: $x_C = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$, coincide con x_B, già studiato!

$p = \frac{1}{4}$: $A = \begin{vmatrix} -0.1667 & -0.25 \\ 0.5 & 0 \end{vmatrix}$ $\operatorname{tr} A < 0$, $\det A > 0$ $\Rightarrow$ A asint. stabile $\Rightarrow x_C$ asint. stabile

calcolatrice!

3)
Si consideri il sistema in figura, in cui il blocco B ha funzione di trasferimento $B(s) = 1/(s + 2)$, il blocco C è un integratore, e il blocco A semplicemente moltiplica per 2 il segnale al proprio ingresso.



a) Determinare le funzioni di trasferimento tra i due ingressi u e w e l'uscita y.
b) Discutere la stabilità delle funzioni di trasferimento determinate al punto precedente.
c) Determinare (qualitativamente) l'andamento dell'uscita a fronte degli ingressi $u(t) = sca(t)$ e $w(t) = -sca(t - 15)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

3

a) $\underset{\sim}{y} = C\left(w - \underset{\sim}{y} + B\left(u - \underset{\sim}{y} + A\underset{\sim}{y}\right)\right)$

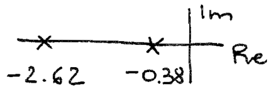
$\underset{\sim}{y}\left(1 + C + CB - CBA\right) = BCu + Cw$

$$\underset{\sim}{y} = \underbrace{\frac{BC}{1 + C + CB - CBA}}_{G(s)} u + \underbrace{\frac{C}{1 + C + CB - CBA}}_{H(s)} w$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{s(s+2)}}{1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+2)}} = \frac{1}{s^2 + 3s + 1}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s+2)}} = \frac{s+2}{s^2 + 3s + 1}$$

b) poli: $s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$



G e H sono asintoticamente stabili, poli reali, $T_D \simeq 2.6$, $T_R \simeq 13.1$

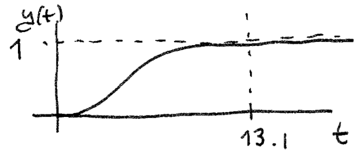
c) Risposta allo scalino di G(s):

$\underset{\sim}{y}_\infty = G(0) = 1$

$\left.\begin{array}{l}\underset{\sim}{y}(0) = 0 \\ \dot{\underset{\sim}{y}}(0) = 0\end{array}\right\} r = 2$

$\ddot{\underset{\sim}{y}}(0) = 1 > 0$

No estremi

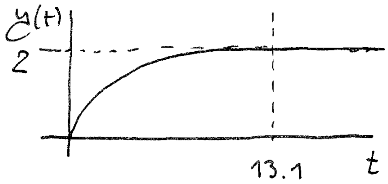


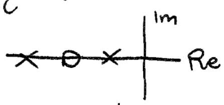
Risposta allo scalino di H(s):

$\underset{\sim}{y}_\infty = H(0) = 2$

$\underset{\sim}{y}(0) = 0 \; \} r = 1$

$\dot{\underset{\sim}{y}}(0) = 1 > 0$

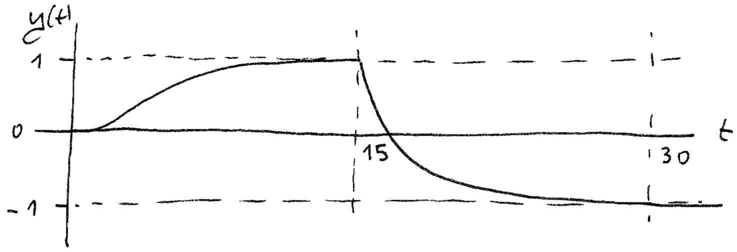




1 zero bene inquadrato,

$\Rightarrow$ NO estremi

Risposta complessiva:



4)

Indicare l'affermazione corretta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) Un sistema lineare a tempo discreto è caratterizzato dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Il movimento libero del sistema

[1] diverge per tutte le condizioni iniziali.
~~[2]~~ diverge per almeno una condizione iniziale.
[3] tende a zero da ogni condizione iniziale.

b) La risposta allo scalino unitario di un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

è pari a

[1] $e^{-t} - e^{-2t} + 1$
~~[2]~~ $e^{-t} - e^{-2t}$
[3] $-e^{t} + e^{2t}$

c) Dato il sistema lineare (*A*, *b*, *c*, *d*), mediante una legge di controllo *u*=*kx* è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori del sistema controllato se e solo se il sistema

[1] è instabile.
[2] è instabile e completamente raggiungibile.
~~[3]~~ è completamente raggiungibile.

d) In un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello *L*(*s*), l'errore a regime dovuto a un disturbo additivo sull'uscita vale zero se e solo se

[1] *L*(*s*) ha almeno uno zero nullo.
~~[2]~~ *L*(*s*) ha almeno un polo nullo.
[3] *L*(*s*) non ha né zeri né poli nulli.

a) t.d. $|tr(A)| = 5 > n = 4 \Rightarrow A$ è INST

b) $y_\infty = G(0) = 0 \rightarrow$ escludo la [1] $\quad\rightarrow$ è la [2]

$\lambda_1 = -1 \rightarrow e^{-t}$

$\lambda_2 = -2 \rightarrow e^{-2t} \quad \rightarrow$ escludo la [3]

c) Vedi teoria (CR e assegnamento autovalori)

d) Vedi teoria (errore a regime nei sistemi di controllo)

5)
Con riferimento a un sistema lineare a tempo continuo con funzione di trasferimento $G(s)$, enunciare il teorema della risposta in frequenza (esistenza e unicità del regime sinusoidale, modulo e fase della sinusoide di uscita).

Quindi si calcoli l'uscita a regime del sistema $G(s) = 1/(1+s)^3$ quando $u(t) = 1000\sin(10t)$.

6)
Sia dato il sistema lineare con ingresso costante pari a 5

$$x_1(t+1) = \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{2}x_3(t)$$
$$x_2(t+1) = -x_1(t) - \frac{1}{2}x_2(t) - x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = u(t)$$
$$y(t) = x_3(t)$$

Quali comandi occorre digitare in Matlab per determinare stato e uscita di equilibrio?

Quali comandi occorre digitare per simulare l'andamento nel tempo della seconda variabile di stato nell'intervallo di tempo [0 10] a partire da condizione iniziale nulla?

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

(5) Dato il sistema con $G(s) = N(s)/D(s)$, al quale è applicato l'ingresso $u(t) = U \sin(\omega t)$, l'uscita sinusoidale $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$ esiste ed è unica se e solo se

$$D(i\omega) \neq 0 .$$

In tal caso, si ha $Y = U\,|G(i\omega)|$ e $\varphi = \arg G(i\omega)$.

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3} \,, \quad G(i\omega) = G(i10) = \frac{1}{(1+i10)^3}$$

$$|G(i10)| = \frac{1}{|1+i10|^3} = \frac{1}{(\sqrt{1+100}\,)^3} = 0.000985$$

$$\measuredangle G(i\omega) = -3 \arctg 10 = -4.41 \ [\text{rad}]$$

da cui: $y(t) = 0.985 \sin(10t - 4.41)$

6)

```
% definizione del sistema
A=[0.5   0   -0.5;-1   -0.5   -1;0   0   0]
b=[0   0   1]'
c=[0   0   1]
d=0
% stato e uscita di equilibrio
u=5
xbar=inv(eye(size(A))-A)*b*u
ybar=c*xbar+d*u
% simulazione seconda variabile di stato
c=[0   1   0]
T=[0:10]
U=u*ones(size(T))
sistema=ss(A,b,c,d,1)
lsim(sistema,U,T)
```