POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 21/7/2022

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
Un istituto che svolge ricerche in ambito socioeconomico suddivide i cittadini italiani in tre categorie, in base al loro status lavorativo attuale:
- Inattivi (coloro che non lavorano ma potranno farlo in un futuro prossimo o remoto: bambini, studenti, adulti in cerca di lavoro),
- Attivi (coloro che lavorano),
- Quiescenti (coloro che hanno cessato definitivamente il lavoro).

Si stima che, ogni anno, la frazione β_1 di Inattivi diventi Attiva, la frazione β_2 di Attivi diventi Inattiva, mentre la frazione β_3 di Attivi diventa Quiescente. Le frazioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rappresentano invece gli individui che, da un anno al successivo, permangono rispettivamente nella categoria Inattivi, Attivi, Quiescenti. Tutti i coefficienti citati hanno valore in $(0,1)$; inoltre, $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ e $\alpha_2 + \beta_2 + \beta_3 < 1$ (il complemento a 1 è la frazione di mortalità).

a) Rappresentare il modello sopra descritto mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $u(t)$ sia il numero di nuovi Inattivi (nuovi nati nella popolazione) nell'anno t, e $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ siano, rispettivamente, il numero di cittadini Inattivi, Attivi e Quiescenti nell'anno t, specificando le matrici (A, b).
b) Si discuta se, conoscendo l'ammontare complessivo annuo $y(t) = \gamma_3 x_3(t)$ (con $\gamma_3 > 0$) di pensioni erogate alla popolazione Quiescente, è possibile ricostruire in tempo arbitrario il numero di individui nelle tre categorie.
c) Si discuta se, conoscendo invece l'ammontare complessivo annuo $y(t) = \gamma_1 x_1(t)$ (con $\gamma_1 > 0$) di sussidi erogati alla popolazione Inattiva, è possibile ricostruire in tempo arbitrario il numero di individui nelle tre categorie.

Si ponga da qui in avanti (ma non prima) $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.6, \alpha_3 = 0.5$, $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.1$, $\beta_3 = 0.2$.

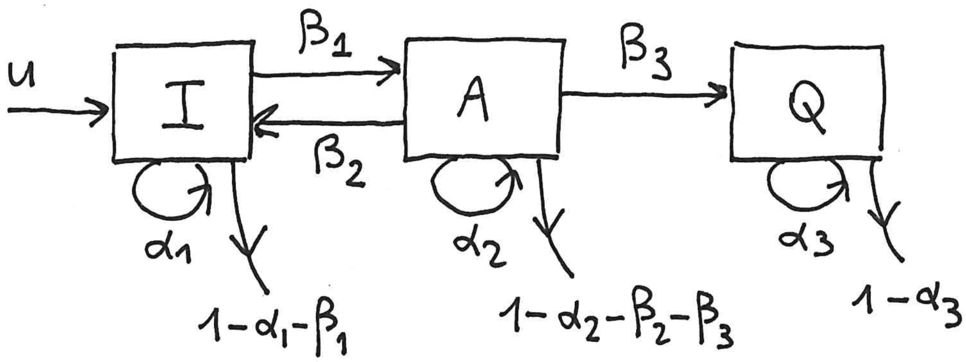
d) Discutere la stabilità del sistema, valutando anche il tempo di risposta e la presenza di eventuali oscillazioni nel movimento a ingresso costante.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

1) a) $x_1(t) =$ n. cittadini Inattivi nell'anno t
$x_2(t) =$ " Attivi "
$x_3(t) =$ " Quiescenti "

$$x_1(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = \alpha_2 x_2(t) + \beta_1 x_1(t)$$
$$x_3(t+1) = \alpha_3 x_3(t) + \beta_3 x_2(t)$$

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$



b) La risposta è affermativa se e solo se, con $y(t) = \gamma_3 x_3(t)$ (quindi $c = |0 \ \ 0 \ \ \gamma_3|$), la coppia (A, c) è completamente osservabile:

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & \gamma_3\beta_3 & \gamma_3\alpha_3 \\ \gamma_3\beta_1\beta_3 & \gamma_3\beta_3(\alpha_2+\alpha_3) & \gamma_3\alpha_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\det \mathcal{O} = -\gamma_3^3 \beta_1 \beta_3^2 \neq 0 \Rightarrow (A, c) \text{ complet. osservabile}$$

c) Come sopra, ma con $c = |\gamma_1 \ \ 0 \ \ 0|$:

$$\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1\alpha_1 & \gamma_1\beta_2 & 0 \\ \gamma_1(\alpha_1^2+\beta_1\beta_2) & \gamma_1\beta_2(\alpha_1+\alpha_2) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det \mathcal{O} = 0 \Rightarrow (A, c) \text{ NON complet. osservabile}$$

d) $A = \left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{\begin{matrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 \end{matrix}}^{\tilde{A}} & & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0.2 & 0.5 \end{array}\right]$ $\quad \sigma(A) = \{0.5\} \cup \sigma(\tilde{A})$

$$\Delta_{\tilde{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 1.4\lambda + 0.46 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0.8732 \\ 0.5268 \end{matrix}\right\} = \lambda$$

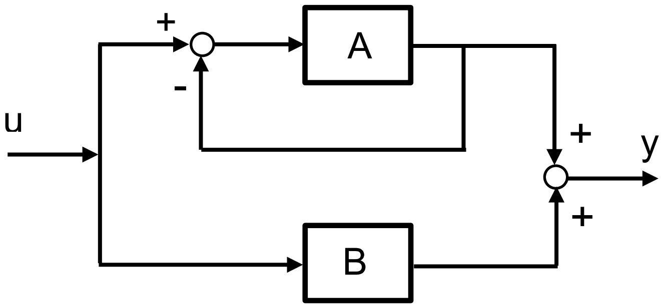
$$\sigma(A) = \{0.8732, 0.5268, 0.5\}$$

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow A$ asintoticamente stabile

$$T_R \simeq 5 T_D = -5 \cdot \frac{1}{\log|\lambda_D|} = -\frac{5}{\log 0.8732} = 36.9$$

autovalori tutti reali $> 0 \Rightarrow$ no oscillazioni

2)
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A è caratterizzato dal modello di stato

$$A_A = \begin{bmatrix} p & 5 \\ 1 & p \end{bmatrix} \qquad b_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c_A = [0 \quad 1]$$

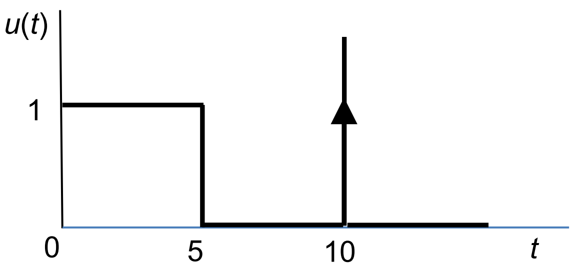
Il blocco B è descritto dal modello ingresso/uscita

$$\ddot{y}_B + 3\dot{y}_B + 2y_B = -\dot{u}_B$$

a) Studiare la stabilità del sistema aggregato al variare di *p* ($-\infty < p < +\infty$), discutendo anche l'eventuale esistenza di oscillazioni nelle risposte a ingresso costante.

b) Per i valori di *p* per cui il sistema è asintoticamente stabile, determinare tutte le costanti di tempo e il tempo di risposta.

c) Posto $p = -4$, tracciare qualitativamente la risposta del sistema aggregato all'ingresso mostrato in figura



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

2)

a) $\Sigma_1 = R // B$ è A.S. $\Longleftrightarrow$ R e B sono A.S.

$$G_R = \frac{G_A}{1 + G_A}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p x_1 + 5 x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 + p x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s x_1 = p x_1 + 5 x_2 + u \\ s x_2 = x_1 + p x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (s-p) x_1 = 5 x_2 + u \\ (s-p) x_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$

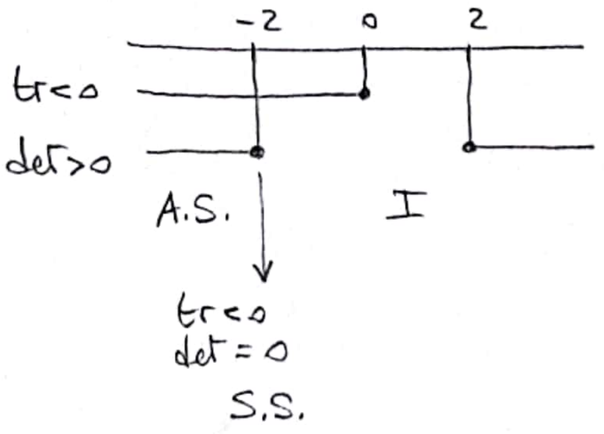
$$(s-p)^2 y = 5y + u \rightarrow (s^2 - 2sp + p^2 - 5) y = u$$

$$G_A = \frac{1}{s^2 - 2sp + p^2 - 5}$$

$$G_R = \frac{1}{s^2 - 2sp + p^2 - 4}$$

$tr = 2p < 0 \rightarrow p < 0$

$det = p^2 - 4 > 0 \rightarrow p < -2 \vee p > 2$



R: $p < -2$ A.S.

$p = -2$ S.S.

$p > -2$ I.

$$\lambda_{1,2}^{R} = +p \pm \sqrt{p^2 - p^2 + 4} = p \pm 2 \in \mathbb{R}$$

$$(s^2 + 3s + 2) y_B = -s u_B \rightarrow G_B = -\frac{s}{s^2 + 3s + 2} = -\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$\lambda_{1,2}^{B} = \{-1, -2\} \rightarrow$ B è A.S.

$$\Sigma' \text{ è } \begin{cases} \text{A.S. per } p<-2 \\ \text{S.S. per } p=-2 \\ \text{I. per } p>2 \end{cases}$$

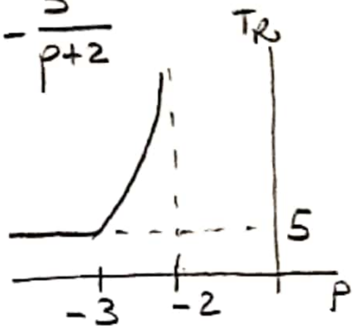
$$\{\lambda\} = \{\lambda\}_R \cup \{\lambda\}_B = \{p+2,\ p-2,\ -1,\ -2\}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ oscillazioni

b) $p<-2 \qquad \{T\} = \left\{ \frac{1}{-p-2},\ \frac{1}{-p+2},\ 1,\ \frac{1}{2} \right\}$

- $\begin{cases} p+2 \geq -1 \\ p<-2 \end{cases} \rightarrow -3 \leq p < -2 \rightarrow \lambda_D = p+2$ e $T_R = -\frac{5}{p+2}$

- $\begin{cases} p+2 < -1 \\ p<-2 \end{cases} \rightarrow p<-3 \rightarrow \lambda_D = -1$ e $T_R = 5$



c) $p=-4 \qquad G_R = \frac{1}{s^2+8s+12} = \frac{1}{(s+2)(s+6)}$

$$G = +G_R + G_B = \frac{1}{(s+2)(s+6)} + \frac{-s}{(s+1)(s+2)} = \frac{(s+1)-s(s+6)}{(s+1)(s+2)(s+6)} =$$

$$= \frac{-s^2-5s+1}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$

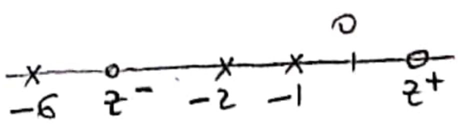
$\downarrow$

$T_R = 5 \quad \nexists$ oscill

Risposta a scalino $\quad y_\infty = G(0) = \frac{1}{12}$

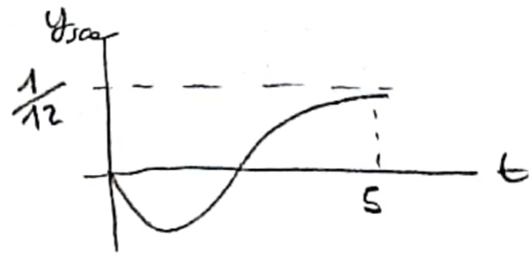
$r=1 \quad y(0)=0 \qquad \dot{y}(0) = -1$

zeri $\rightarrow s^2+5s-1=0 \qquad z_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2} \begin{cases} z^+ \\ z^- \end{cases}$

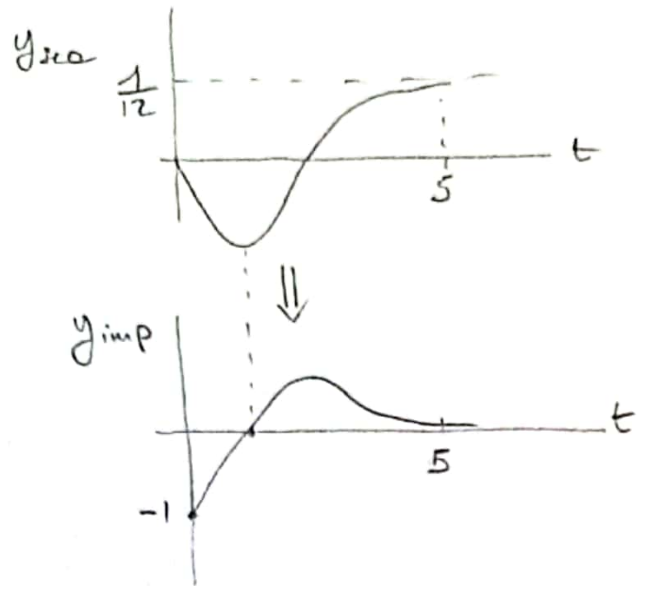


$m_s = 1 \qquad N=1$

$\sigma = 0$



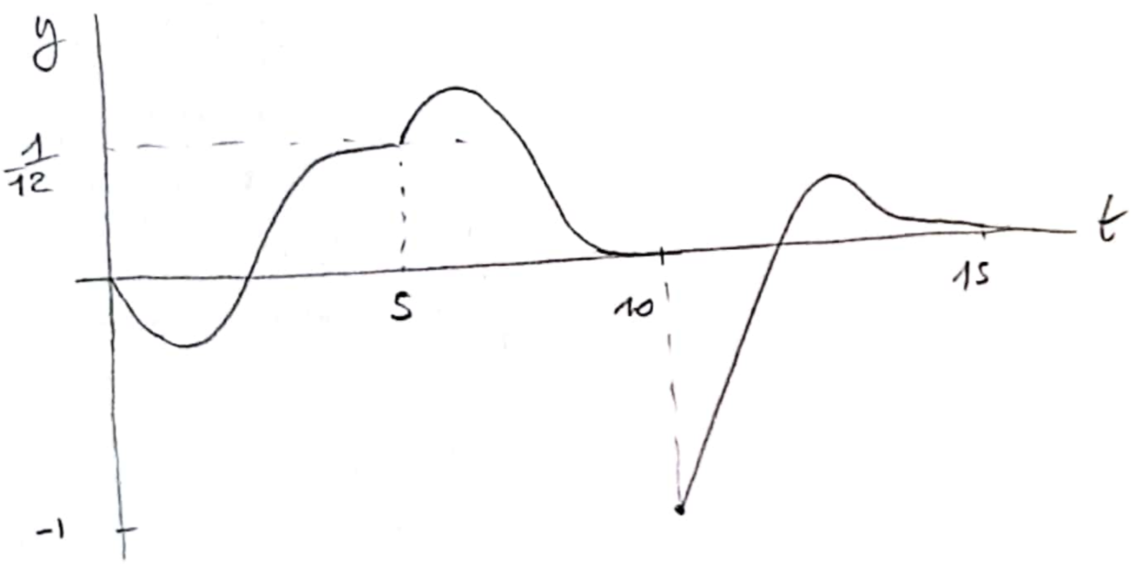
Risposta a impulso $\rightarrow$ derivata della risposta a scalino



$y_{imp}(0) = \dot{y}_{sca}(0) = -1$

$\dot{y}_{sca} = 0 \rightarrow y_{imp} = 0$

Risposta a ingresso dato $\quad u(t) = sca(t) - sca(t-5) + imp(t-5)$

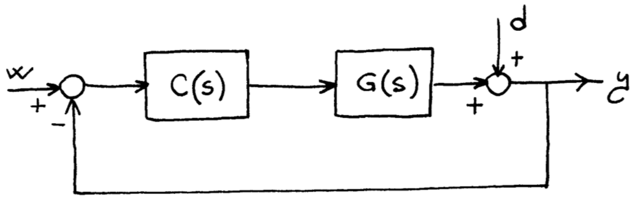


3)
Sia dato un sistema lineare a tempo continuo caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + s + 100}$$

a) Tracciare i diagrammi di Bode approssimati di modulo e fase di G(s), specificando, in particolare, se può esserci una marcata differenza tra questi e i diagrammi esatti.

Si consideri ora il sistema di controllo rappresentato in figura.



b) Progettare un controllore C(s) tale che

- l'errore a transitorio esaurito sia nullo a fronte di riferimento w e disturbo d costanti;
- il tempo di risposta del sistema controllato sia pari a 5;
- il sistema di controllo sia asintoticamente stabile.

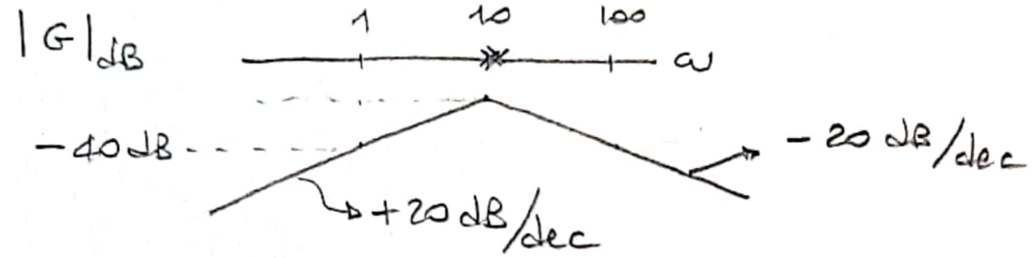
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

3)

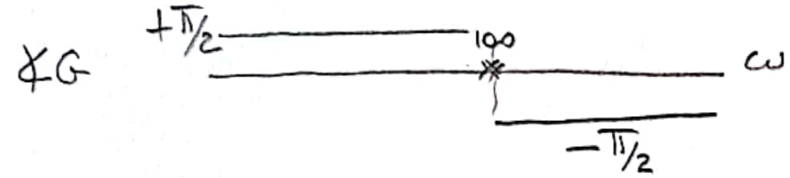
a) $$G(s) = \frac{s}{s^2+s+100} \qquad p_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{399}}{2} \in \mathbb{C} \quad \text{stabili}$$

$$\downarrow$$

$$G(s) = \frac{1}{100}\, s\, \frac{100}{s^2+s+100} \qquad \begin{aligned} \omega_n &= 10 \\ 2\xi\omega_n &= 1 \rightarrow \xi = \frac{1}{20} \end{aligned}$$



1 zero nell'origine
$\mu = \frac{1}{100}$ $\mu_{dB} = -40\,dB$
2 poli stab. $\mathbb{C}$



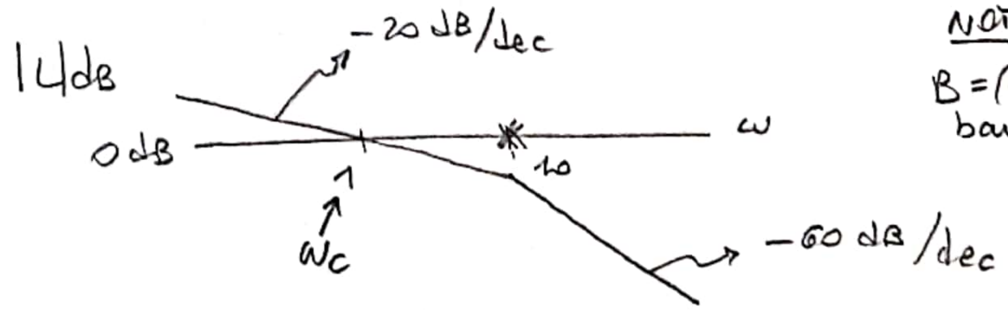
I diagrammi esatti differiscono da quelli approx essendo i poli complessi coniugati con smorzamento ξ piccolo

b) $e_\infty = 0 \Rightarrow L = CG$ deve avere almeno un polo nell'origine $\Rightarrow C = \frac{\mu}{s^2}$

$$L = \frac{\mu}{100}\, \frac{1}{s}\, \frac{100}{s^2+s+100} = \frac{\tilde{\mu}}{s} \cdot \frac{100}{s^2+s+100} \qquad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{100}$$

$$T_R = 5 = \frac{5}{\omega_c} \rightarrow \omega_c = 1$$

$\tilde{\mu} = 1$
$\downarrow$
$\tilde{\mu}_{dB} = 0\,dB$

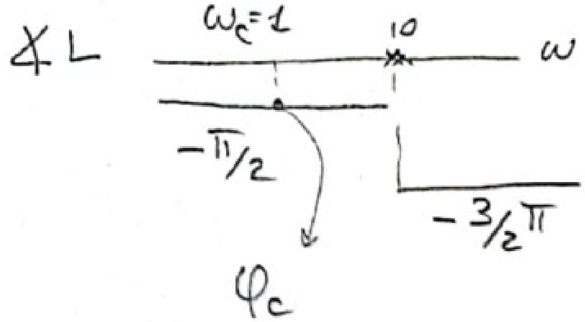


NOTA
$B = (0, \omega_c) = (0, 1)$
banda passante

ok $\rightarrow \mu = 100$

Verifico l'A.S. del sistema di controllo con il criterio di Bode

- L non ha poli a $\mathbb{R}e > 0$
- L propria $\longrightarrow$ posso applicare Bode
- $|L|_{dB} \cap ! \; 0 dB$



$$\varphi_c \simeq -\pi/2 \Rightarrow \varphi_m = \pi - |\varphi_c| > 0$$

Poiché $\begin{cases} \varphi_m > 0 \\ \tilde{\mu} > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{BODE}}$ A.S.

4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

a) Dato un sistema (A, b, c, d), la sua funzione di trasferimento $G(s)$ è un rapporto di polinomi in cui il grado del denominatore

[1] è sempre maggiore del grado del numeratore
~~[2]~~ è sempre maggiore o uguale del grado del numeratore
[3] è sempre minore o uguale del grado del numeratore

b) Un sistema lineare $\dot{x} = Ax + bu$ asintoticamente stabile, sottoposto a ingresso costante $\bar{u}$

[1] può avere uno, nessuno, o infiniti equilibri, a seconda del valore di $\bar{u}$
[2] ha uno e un solo equilibrio, ma solo per $\bar{u} = 0$
~~[3]~~ ha uno e un solo equilibrio per ogni $\bar{u}$

c) Il sistema $\dot{x} = Ax$ con polinomio caratteristico $\Delta_A(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 3\lambda^2 + \lambda + 1$

[1] è asintoticamente stabile
~~[2]~~ non è asintoticamente stabile
[3] non è possibile affermare nulla con l'informazione disponibile

d) Il sistema non lineare $\dot{x} = f(x)$, di ordine n=3, ha un equilibrio $\bar{x}$ la cui matrice jacobiana ha autovalori {-2,-1,0}. E' possibile affermare che:

[1] l'equilibrio è asintoticamente stabile.
[2] l'equilibrio è stabile.
~~[3]~~ non è possibile affermare nulla con le informazioni a disposizione.

a) grado(DEN) $\geq$ grado (NUM), con = solo per sistema improprio ($d \neq 0$)

b) Se A asint. stabile $\Rightarrow$ A invertibile, quindi $\exists!\ \bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$, qualunque sia $\bar{u}$.

c) A asintot. stabile $\Rightarrow \alpha_i > 0\ \forall i$. In questo caso $\alpha_2 = 0$ (manca il termine λ^3), per cui A non può essere asint. stabile.

d) Poiché:
- NON E' VERO che $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0\ \forall i$
- NON E' VERO che $\exists i : \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$

il teorema di linearizzazione non permette di affermare nulla sulla stabilità di $\bar{x}$.

5)
Si consideri il sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t)$. Per tale sistema:

a) Si fornisca la definizione di instabilità, in funzione del movimento libero del sistema.
b) Si dica sotto quali condizioni il sistema è instabile, in funzione degli autovalori del sistema.
c) Infine, si fornisca un esempio numerico di matrice A, di ordine qualunque, dimostrando che rende il sistema $x(t+1) = Ax(t)$ instabile con infiniti stati di equilibrio.

6)
Un sistema lineare a tempo continuo con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{10s^2 + 11s + 1}$$

è alimentato da una funzione di ingresso sinusoidale di ampiezza 10 e pulsazione 0.1.

Scrivere quali comandi occorre digitare in Matlab per tracciare il grafico del comportamento dell'uscita nel tempo.

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

5) a) A è instabile se il movimento libero $A^t x(0)$ non è limitato per almeno un $x(0)$.

b) A è instabile se

* $\exists i : |\lambda_i| > 1$ (instabilità forte)

oppure

* $|\lambda_i| \leq 1 \ \forall i$, ma $\exists i : |\lambda_i| = 1$, e almeno uno degli autovalori con $|\lambda_i| = 1$ non è regolare. (instabilità debole)

c) Sappiamo che, se $(I-A)$ è invertibile, il sistema avrà uno e un solo equilibrio. Dobbiamo quindi rendere $(I-A)$ singolare. Ad esempio:

$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ è instabile, perché $\exists \lambda_i = 2$: $|\lambda_i| > 1$.

Inoltre abbiamo: $\begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t) \\ x_2(t+1) = x_2(t) \end{cases}$, e all'equilibrio:

$\begin{cases} x_1 = 2x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$, da cui $\bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ x_2 \end{vmatrix}$, con x_2 qualunque. (∞ equilibri)

```
num=[1 0]
den=[10 11 1]
sistema=tf(num,den)
t=linspace(0,200,1000)
u=10*sin(0.1*t)
y=lsim(sistema,u,t)
figure
plot(t,y)
```

→ vedi NOTA

NOTA: Il tempo di risposta del sistema è pari a 50 mentre il periodo della sinusoide è circa 63. Pertanto, in 200 unità di tempo il sistema avrà esaurito il suo transitorio e si potranno vedere alcune oscillazioni nel grafico del segnale di uscita.