POLITECNICO MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 17/6/2022

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

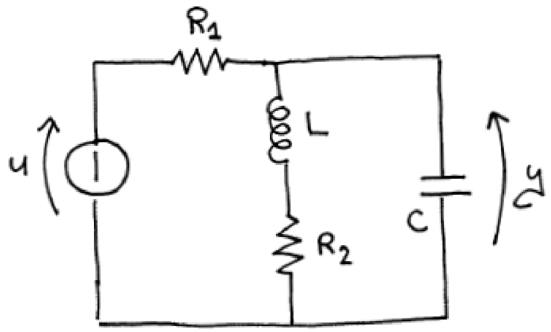
Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
Si consideri la rete elettrica in figura, in cui $R_1, C, L > 0$, mentre R_2 può assumere qualunque valore reale.



a) Scrivere le equazioni di stato e di uscita del sistema, specificando le matrici (A, b, c) ottenute.

Si ponga da qui in avanti (ma non prima) $R_1 = C = L = 1$.

b) Discutere la stabilità (interna) del sistema <u>per ogni</u> valore di R_2.
c) Posto $R_2 = 1$, determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.
d) Sempre posto $R_2 = 1$, supponendo che sull'uscita del sistema agiscano disturbi (qui non modellizzati), si vuole progettare un sistema di controllo che:
- sia asintoticamente stabile, con margine di fase qualunque purché positivo;
- a transitorio esaurito, renda nulla la differenza tra il valore desiderato (costante) e quello effettivo dell'uscita.
Si proponga quindi un'adeguata funzione di trasferimento $C(s)$ del controllore.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

1

a) $\dot{x}_1 = \dfrac{1}{L}\left(x_2 - R_2 x_1\right)$

$\dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{u - x_2}{R_1} - x_1\right)$

$y = x_2$

$$A = \begin{vmatrix} -\dfrac{R_2}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_1} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{CR_1} \end{vmatrix}$$

$$c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b) $A = \begin{vmatrix} -R_2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \mathrm{tr}\,A = -(R_2+1) \\ \det A = R_2 + 1 \end{cases}$

$c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix}$

* $\left.\begin{matrix} \mathrm{tr}\,A < 0 \\ \det A > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow R_2 + 1 > 0 \Leftrightarrow R_2 > -1 \Leftrightarrow A$ asint. stabile

* $R_2 < -1 \Rightarrow \begin{matrix} \mathrm{tr}\,A > 0 \\ \det A < 0 \end{matrix} \Rightarrow A$ instabile ($\exists \lambda_i$ reale > 0)

* $R_2 = -1 \Rightarrow \Delta_A(\lambda) = \lambda^2$, $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica $= 2$

Ma $\lambda = 0$ non è autovalore regolare (VERIFICA!), per cui A INSTABILE (DEBOLM.).

c) $sx_1 = -x_1 + x_2$

$sx_2 = -x_1 - x_2 + u \qquad \Rightarrow \qquad G(s) = \dfrac{1+s}{s^2 + 2s + 2}$

$y = x_2$

(i poli sono complessi: $s = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$)

d) Per avere errore nullo a regime, $L(s) = C(s)G(s)$ deve avere tipo $= 1$. Prendiamo:

$$C(s) = \frac{\mu}{s}$$

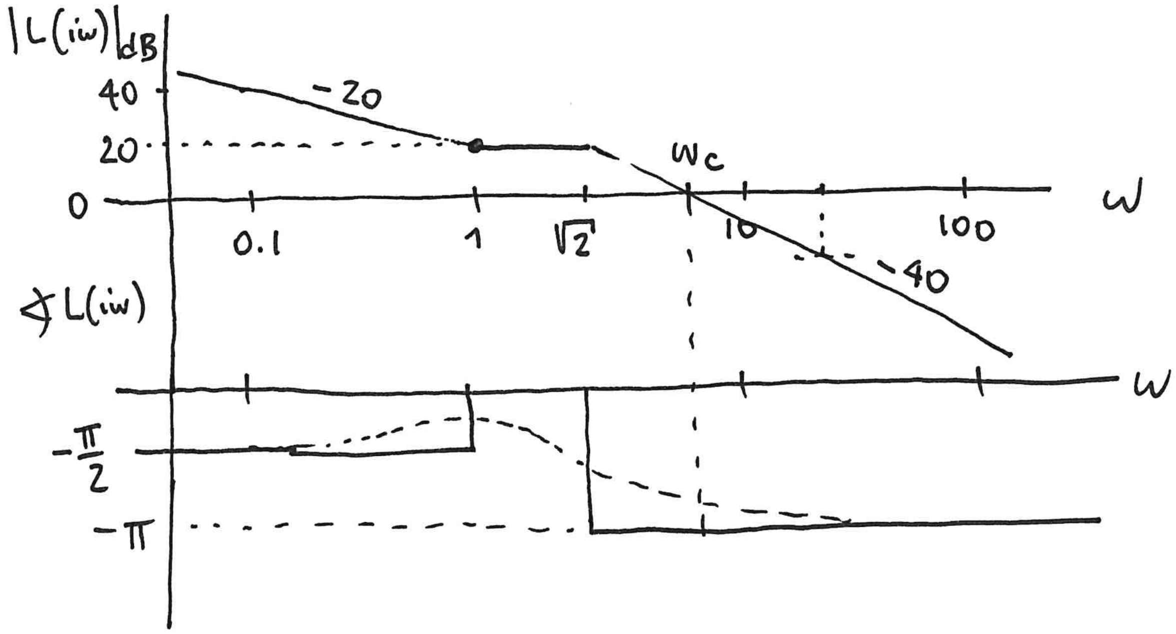
In forma standard:

$$L(s) = \frac{\frac{1}{2}\mu}{s} \cdot (1+s) \cdot \frac{2}{s^2+2s+2} \rightsquigarrow \omega_n = \sqrt{2}, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pongo $\mu = 20$:

$$L(s) = \frac{10}{s} \cdot (1+s) \cdot \frac{2}{s^2+2s+2}$$

criterio di Bode:



condizioni di applicabilità:

1) i poli di $L(s)$ hanno $Re(p) \geq 0$ ✓
2) $\exists!\ \omega = \omega_c : |L(i\omega_c)| = 1 = 0\,dB$ ✓

quindi

a) $\mu > 0$ ✓
b) $\varphi_m > 0$ ✓

$\Longrightarrow$ sistema di controllo asintoticamente stabile

($\varphi_m > 0$ perché $|\varphi_c| < \pi$)

2)
Si consideri il seguente sistema a tempo continuo di ordine $n = 1$, in cui il parametro $p \in (-\infty, +\infty)$:

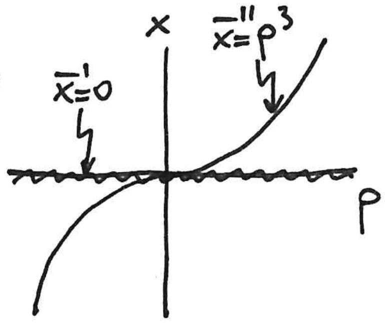
$$\dot{x} = x^2 - xp^3$$

a) Determinare tutti gli equilibri del sistema al variare di p, rappresentandoli poi graficamente nel piano (p, x).
b) Discutere la stabilità degli stati di equilibrio per ogni valore di p, dove possibile usando il metodo di linearizzazione.
c) Per i tre valori $p = -2; 0;\ 2$, discutendo il segno di $\dot{x}$, tracciare il quadro delle traiettorie nello spazio di stato $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

②

a) $\dot{x} = x^2 - xp^3 = x(x - p^3) \begin{cases} \nearrow \bar{x}' = 0 \,, \quad \forall p \\ \searrow \bar{x}'' = p^3 \end{cases}$



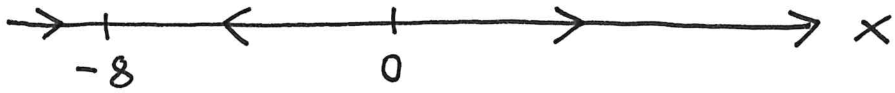
b) $A = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - p^3$

1) $\bar{x}' = 0 \; : \; A = -p^3 \; : \; \begin{cases} p<0 \Rightarrow A>0 \Rightarrow \bar{x}' \text{ INSTABILE} \\ p>0 \Rightarrow A<0 \Rightarrow \bar{x}' \text{ ASINT. STAB.} \\ p=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow \,? \end{cases}$

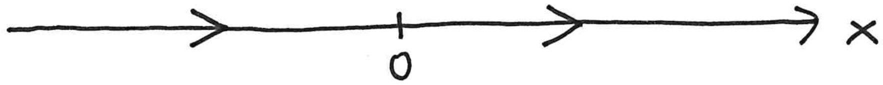
2) $\bar{x}'' = p^3 \; : \; A = p^3 \; : \; \begin{cases} p<0 \Rightarrow A<0 \Rightarrow \bar{x}'' \text{ ASINT. STAB.} \\ p>0 \Rightarrow A>0 \Rightarrow \bar{x}'' \text{ INSTABILE} \\ p=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow \,? \end{cases}$

Per $p=0$, $\bar{x}' = \bar{x}'' = 0$ e $\dot{x} = x^2$: $\dot{x} > 0 \;\; \forall x \neq 0$, per cui le traiettorie che partono da $x(0) = \varepsilon > 0$ si allontanano da $\bar{x} = 0$, che quindi è INSTABILE.

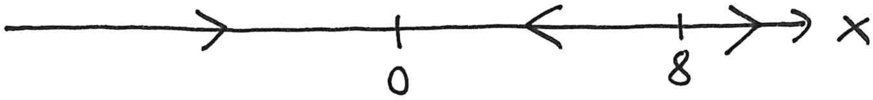
c) $p = -2$:



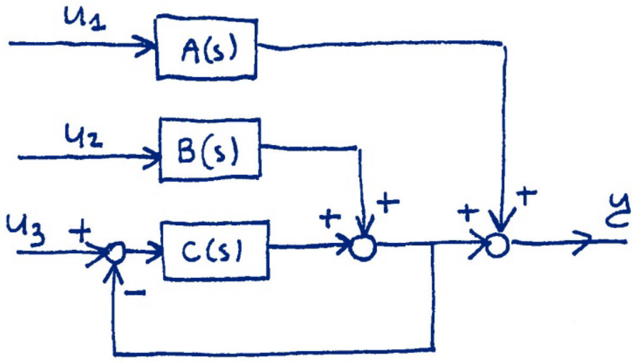
$p = 0$:



$p = 2$:



3)
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura:



in cui $A(s) = s(s-1)/(s+1)^3$, $B(s) = 2/(s^2+2s+2)$, $C(s) = (4s+7)/(s+1)^2$.

a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascun ingresso e l'uscita e discuterne la stabilità.
b) Determinare qualitativamente l'uscita $y(t)$ quando ai tre ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente, 0, 5, 10.
c) Determinare qualitativamente l'uscita $y(t)$ quando ai tre ingressi u_1, u_2, u_3 viene applicato un impulso unitario agli istanti, rispettivamente, 0, 5, 10.

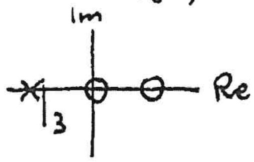
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

(3)

a) $y = Au_1 + Bu_2 + C\left(u_3 - [y - Au_1]\right)$, da cui

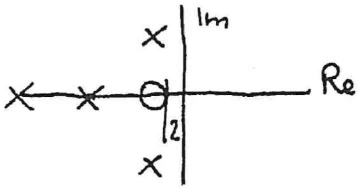
$$y = Au_1 + \underbrace{\frac{B}{1+C}}_{F(s)} u_2 + \underbrace{\frac{C}{1+C}}_{G(s)} u_3$$

$$A(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^3}$$



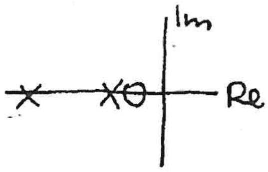
Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

$$F(s) = \frac{2}{s^2+2s+2} \cdot \frac{1}{1+\frac{4s+7}{(s+1)^2}} = \frac{2(s+1)^2}{(s+1-i)(s+1+i)(s+2)(s+4)}$$



Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

$$G(s) = \frac{\frac{4s+7}{(s+1)^2}}{1+\frac{4s+7}{(s+1)^2}} = \frac{4s+7}{(s+2)(s+4)}$$

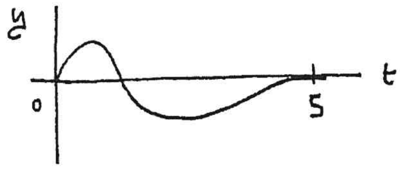


Re(poli) < 0 $\forall i$
$\Rightarrow$ asint. stabile

b) $A(s)$: $y(\infty) = A(0) = 0$

$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1 > 0$, $T_R \simeq 5$

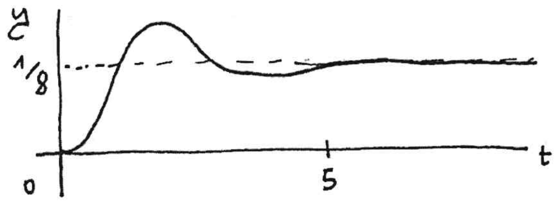
estremi : $m_s = 2$, $N = 2$



$F(s)$: $y(\infty) = F(0) = 1/8$

$r = 2$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $\ddot{y}(0) = 2 > 0$, $T_R \simeq 5$

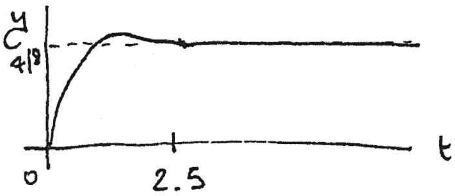
oscillazioni: $\tau = \dfrac{2\pi}{1}$



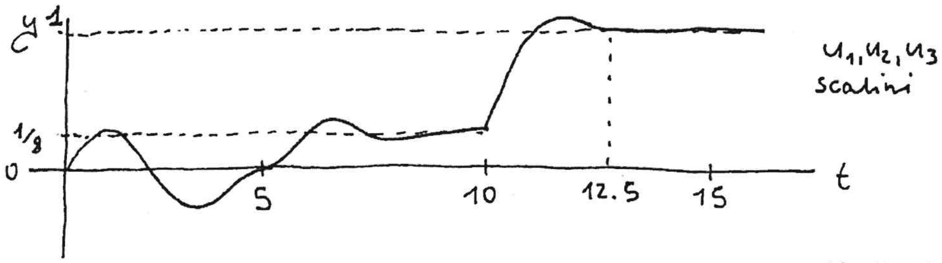
$G(s)$: $y(\infty) = G(0) = 7/8$

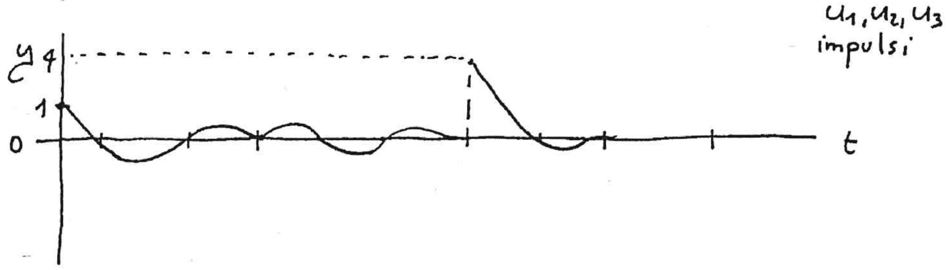
$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 4 > 0$, $T_R \simeq 5/2$

estremi : $m_s = 1$, $N = 1$



Complessivamente (ricordando che la risposta all'impulso è ottenibile graficamente come derivata della risposta allo scalino):





4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

Un sistema lineare non completamente osservabile è rivelabile se e solo se

[1] la sua parte osservabile è asintoticamente stabile
[2] la sua parte osservabile non è asintoticamente stabile
[3] la sua parte non osservabile è asintoticamente stabile
[4] la sua parte non osservabile non è asintoticamente stabile

La banda passante B di un sistema di controllo (con retroazione unitaria negativa) avente funzione di trasferimento di anello $L(s) = \frac{10000s}{(s+10)(s+100)}$ è pari a

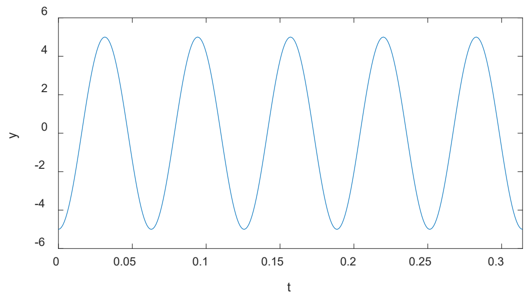
[1] B = (1, 1000)
[2] B = (0.1, 10000)
[3] B = (10, 100)
[4] B = (0, 10000)

In un sistema lineare a tempo continuo esternamente stabile e con guadagno non nullo, sottoposto a ingresso costante $u(t) = \bar{u} \neq 0$, l'uscita $y(t)$, per $t \to \infty$, tende sicuramente:

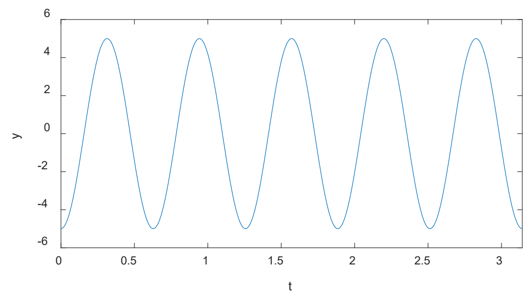
[1] a 0, da qualunque stato iniziale
[2] a 0, da stato iniziale nullo
[3] a un valore costante, da qualunque stato iniziale
[4] a un valore costante, da stato iniziale nullo

L'uscita a regime $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s) = \frac{100}{s^2+0.1s+100}$, avente ingresso $u(t) = 5sen(10t)$, è pari a:

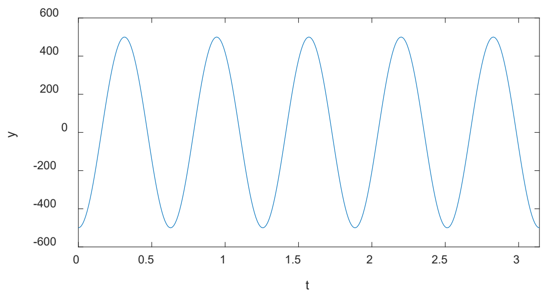
[1]



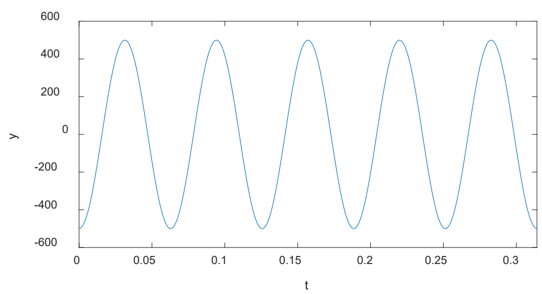
[2]



[3]



[4]



5)
Si fornisca la definizione di sistema (A, b, c) stabilizzabile e si precisi sotto quali condizioni il sistema è stabilizzabile.

Verificare quindi la stabilizzabilità del sistema lineare a tempo continuo caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

6)
Sia dato il sistema a tempo discreto caratterizzato dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = 0$$

Scrivere i comandi Matlab necessari per studiarne la completa raggiungibilità.

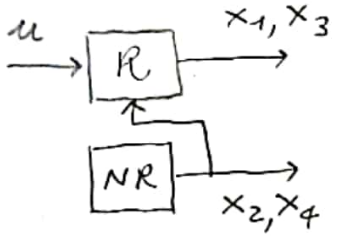
Scrivere quindi i comandi necessari per determinare una legge di controllo k che annulli tutti i transitori del sistema controllato in tempo finito.

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

(5) $(A,b,-,-)$ è stabilizzabile se e solo se ammette una legge di controllo stabilizzante, cioè se e solo se $\exists k \,/\, A+bk$ abbia tutti gli autovalori a parte reale negativa (tempo continuo) o modulo minore di uno (tempo discreto)

$(A,b,-,-)$ CR $\Rightarrow$ è stabilizzabile

$(A,b,-,-)$ NON CR è stabilizzabile $\Leftrightarrow$ la sua parte NR è AS



$A_{1,3} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad b_{13} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad R_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ $\quad \det R_{13} \neq 0 \Rightarrow$ (1,3) è CR

NR $\rightarrow A_{24} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$ $\quad$ $tr = -5 < 0$, $\det = 6 > 0$ (t.c.) $\quad$ NR è AS $\Rightarrow$ SÌ

(6) A=[-1 0 2; -1 1 3; 0 -1 0]

b=[-1 2 1]'

R=ctrb(A,b)

det(R)

autov=[0 0 0]

k=acker(A,-b,autov)