POLITECNICO
MILANO 1863

SOLUZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 1/2/2022

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2

Voto totale
32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

Una società di noleggio auto propone ai propri clienti due possibili contratti, uno di durata *annuale* e l'altro di durata *biennale*. Al termine del periodo di noleggio, l'autovettura può essere restituita alla società oppure riscattata dal cliente. In particolare, tutte le vetture noleggiate con formula *annuale* vengono riscattate (al prezzo di 8.000 € ciascuna), mentre lo è solo il 75% delle autovetture noleggiate con formula *biennale* (al prezzo di 4.000 € ciascuna). Le vetture non riscattate vengono nuovamente tutte noleggiate con la stessa formula. La rata annuale di noleggio con formula *annuale* è pari a 2.000 € all'anno, mentre con formula *biennale* è di 1.000 € all'anno. Ogni anno si stima che il 20% delle autovetture noleggiate subisca un deterioramento tale da rendere l'autovettura non più utilizzabile. In tal caso, il cliente non è più tenuto a pagare la rata per l'eventuale anno successivo di noleggio. Infine, ogni anno la società acquista nuove autovetture, che equi-ripartisce tra quelle destinate alla formula *annuale* e *biennale*.

a) Si proponga un modello che descriva l'evoluzione nel tempo del numero di autovetture noleggiate con formula *annuale* e *biennale*, in cui $u(t)$ rappresenti il numero di nuove autovetture acquistate all'anno t, e $y(t)$ il ricavo all'anno t derivante dal noleggio e dal riscatto.

b) Si studi la stabilità del sistema, discutendo in particolare il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni.

c) Si determini la funzione di trasferimento del sistema e, a partire da questa, il ricavo annuo a regime supponendo che la società acquisti ogni anno 100 nuove autovetture.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_1(t) =$ # autovetture noleggiate da 1 anno con formula annuale

$x_2(t) =$ " 1 anno " biennale

$x_3(t) =$ " 2 anni " biennale

$$x_1(t+1) = 0{,}8 \cdot 0{,}5\, u(t)$$

$$x_2(t+1) = 0{,}8 \cdot 0{,}5\, u(t) + 0{,}8 \cdot 0{,}25\, x_3(t)$$

$$x_3(t+1) = 0{,}8\, x_2(t)$$

$$y(t) = 2000\, x_1(t) + 1000\,(x_2(t) + x_3(t)) +$$
$$+ 8000\, x_1(t) + 4000 \cdot 0{,}75\, x_3(t)$$

$$x_1(t+1) = \frac{2}{5} u(t)$$

$$x_2(t+1) = \frac{1}{5} x_3(t) + \frac{2}{5} u(t)$$

$$x_3(t+1) = \frac{4}{5} x_2(t)$$

$$y(t) = 10'000\, x_1(t) + 1000\, x_2(t) + 4000\, x_3(t)$$

b) $A = \left|\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \end{array}\right|$ Diagonale a blocchi

$\lambda_1 = 0$ $\quad$ $\begin{array}{l} tr = 0 \\ \det = -\frac{4}{25} \end{array} \rightarrow \lambda^2 - \frac{4}{25} = 0$ $\quad \lambda_2 = \frac{2}{5} \quad \lambda_3 = -\frac{2}{5}$

$|\lambda_i| < 1 \ \forall i \Rightarrow$ A.S.

$|\lambda_D| = \frac{2}{5}$ $\quad T_D = -\frac{1}{\ln|\lambda_D|}$ $\quad$ e $T_R = 5T_D \simeq 6$ anni

Poiché $\lambda_3 < 0 \Rightarrow \exists\ \infty$ oscillazioni

c) $z x_1 = \frac{2}{5} u \longrightarrow \boxed{x_1 = \frac{2}{5} \frac{1}{z} u}$

$z x_2 = \frac{1}{5} x_3 + \frac{2}{5} u$

$z x_3 = \frac{4}{5} x_2$

$z^2 x_2 = \frac{1}{5}(z x_3) + \frac{2}{5} z u \rightarrow z^2 x_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} x_2 + \frac{2}{5} z u$

$(25 z^2 - 4) x_2 = 10 z u \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{10 z}{25 z^2 - 4} u}$

$x_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{z} x_2 \longrightarrow \boxed{x_3 = \frac{8}{25 z^2 - 4} u}$

$$y = \left(\overset{2000}{\cancel{10000}}\ \cancel{\frac{2}{5}} \cdot \frac{1}{z} + 1000 \ \frac{10\,z}{25z^2-4} + 4000 \ \frac{8}{25z^2-4} \right) u$$

$$y = \frac{4000\left(25z^2-4\right) + 10'000\, z^2 + 32'000\, z}{z\left(25z^2-4\right)} \ u$$

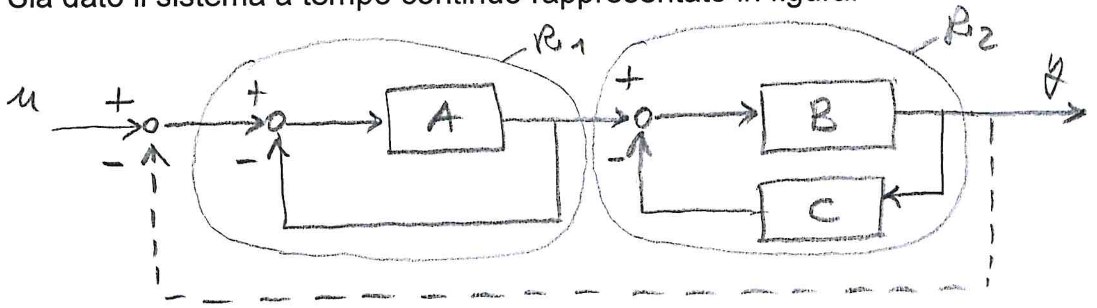
$$y = \frac{110'000\, z^2 + 32'000\, z - 16'000}{z\left(25z^2-4\right)} \ u$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{110'000\, z^2 + 32'000\, z - 16'000}{z\left(25z^2-4\right)}$$

$$\bar{y} = G(1)\,\bar{u} = \frac{110'000 + 32'000 - 16'000}{25-4} \cdot 100 =$$

$$= \frac{126'000}{21} \cdot 100 = 6000 \cdot 100 = 600'000 \ €/\text{anno}$$

2)
Sia dato il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



Il blocco A è un integratore e il blocco B è descritto dal modello ingresso/uscita $\dot{y}_B - 10y_B = u_B$.

a) Si consideri dapprima il sistema <u>SENZA</u> il collegamento tratteggiato. Proporre, per il blocco C, una qualunque funzione di trasferimento di ordine 1 che renda il sistema aggregato asintoticamente stabile, determinando tutte le costanti di tempo del sistema aggregato, il suo tempo di risposta e discutendo l'eventuale presenza di oscillazioni infinite.

b) Con il blocco C proposto al punto precedente, studiare la stabilità del sistema ottenuto <u>CON</u> il collegamento tratteggiato.

Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

$$G_A = \frac{1}{s} \qquad G_B = \frac{1}{s-10}$$

a) $G_C = \dfrac{\alpha}{s+\beta}$

Il sistema è costituito dal collegamento in cascata di R_1 e R_2
Pertanto è A.S. $\Leftrightarrow$ R_1 e R_2 sono A.S.

$$G_{R_1} = \frac{G_A}{1+G_A} = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{1+s} \qquad \lambda = -1 \Rightarrow A.S.$$

$$G_{R_2} = \frac{G_B}{1+G_B G_C} = \frac{\frac{1}{s-10}}{1+\frac{1}{s-10}\frac{\alpha}{s+\beta}} = \frac{s+\beta}{s^2+(\beta-10)s+\alpha-10\beta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta - 10 > 0 \\ \alpha - 10\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 121 \\ \beta = 12 \end{matrix} \Rightarrow G_{R_2} = \frac{s+12}{s^2+2s+1} = \frac{s+12}{(s+1)^2}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow A.S.$$

$$G_c(s) = \frac{121}{s+12}$$

$$\{\lambda\} = \{-1, -1, -1\}$$

$$\{T\} = \{1, 1, 1\} \qquad T_R = 5 \qquad \lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists \text{ oscill}$$

b) $$G_{TOT} = \frac{G_{R_1} \cdot G_{R_2}}{1 + G_{R_1} \cdot G_{R_2}} = \frac{\frac{1}{1+s} \cdot \frac{s+12}{(s+1)^2}}{1 + \frac{1}{1+s} \cdot \frac{s+12}{(s+1)^2}}$$

$$G_{TOT} = \frac{---}{(1+s)^3 + (s+12)} = \frac{---}{s^3 + 3s^2 + 4s + 13}$$

Hurwitz

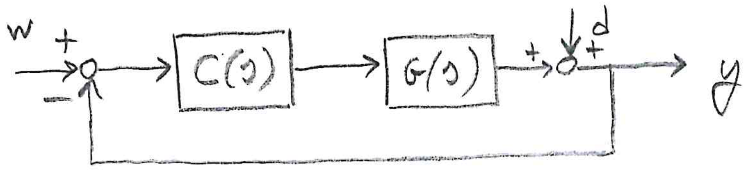
$$\alpha_1 = 3 \qquad \alpha_i > 0 \checkmark$$

$$\alpha_2 = 4 \qquad \alpha_1 \alpha_2 = 12 \ngtr \alpha_3 = 13 \Rightarrow \text{NON A.S.}$$

$$\alpha_3 = 13$$

3)
Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui

$$C(s) = \frac{\mu}{s+10} \qquad\qquad G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+100)}$$



a) Determinare un valore del coefficiente μ che renda il sistema di controllo asintoticamente stabile, con margine di fase pari a circa 45°.

Utilizzando il valore di μ ricavato al punto a):

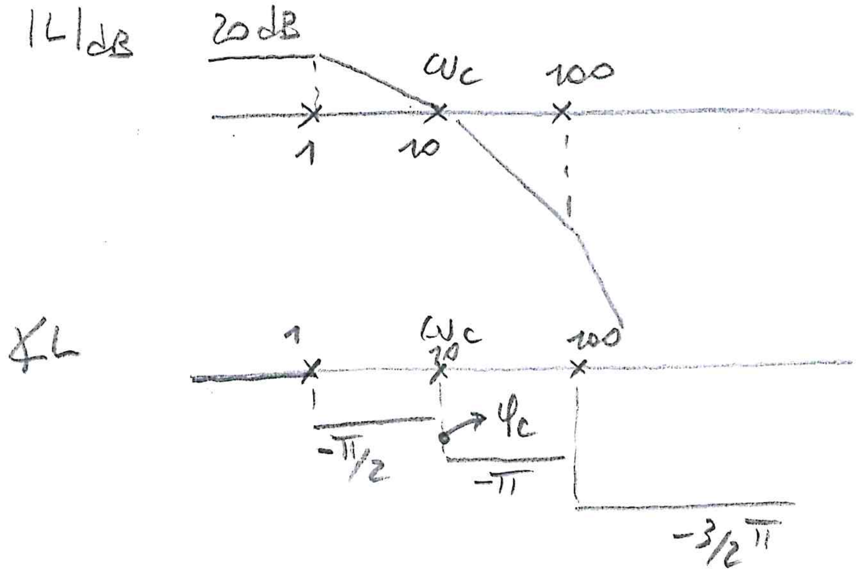
b) Determinare l'errore a regime dovuto al riferimento w costante.
c) Determinare (anche in modo approssimato) la banda passante e il tempo di risposta del sistema di controllo.
c) Determinare (anche in modo approssimato e commentando il risultato ottenuto) l'errore a regime dovuto al disturbo $d(t) = 2 + 0.1\,sin(\,30t\,)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $L = CG = \dfrac{10\,\mu}{(s+10)(1+s)(s+100)} = \dfrac{\cancel{10}\,\mu}{\cancel{10}\cdot 100\,(1+s)(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)}$

$L = \dfrac{\tilde{\mu}}{(1+s)(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)} \qquad \tilde{\mu} = \dfrac{\mu}{100}$

$\tilde{\mu} = 10$



$\omega_c \cong 10 \qquad \varphi_c \simeq -\frac{3}{4}\pi \qquad \varphi_m = \pi - |\varphi_c| \cong \pi/4$ ✓

L propria
$|L|_{dB} \cap !\ 0dB$
L non ha $\mathrm{Re}(\text{poli}) > 0$

$\xrightarrow{\text{BODE}}$ $\tilde{\mu} > 0$, $\varphi_m > 0$ $\longrightarrow$ A.S.

$\tilde{\mu} = 10 \implies \mu = 1000$

b) $e = \frac{1}{1+L} w \implies e_\infty = \frac{1}{1+\tilde{\mu}} \bar{w} = \frac{1}{11} \bar{w}$

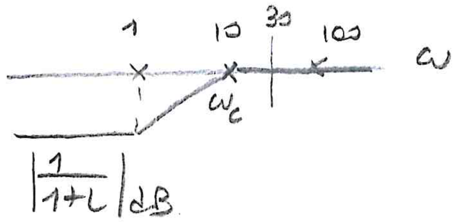
c) $B = (0, \omega_c) = (0, 10) \qquad T_R = \frac{5}{\omega_c} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

d) $e = -\frac{1}{1+L} d$

$$e_\infty = -\frac{1}{1+L(0)} \cdot 2 - 0{,}1 \left| \frac{1}{1+L} \right|_{s=30i} \text{sen}(30t + \varphi)$$

$L(0) = \tilde{\mu} = 10$

$\left| \frac{1}{1+L} \right|_{s=30i} \simeq 1$



$$e_\infty = -\frac{2}{11} - 0{,}1\ \text{sen}(30t + \varphi)$$

↳ il disturbo è fuori banda e passa inalterato attraverso il sistema di controllo

4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

L'insieme di raggiungibilità di un sistema (A, b, c) coincide sempre con

[1] lo spazio di stato del sistema
[2] il sottospazio immagine (span) della matrice di raggiungibilità R
[3] lo spazio nullo (kernel) della matrice di raggiungibilità R
[4] lo spazio nullo (kernel) della matrice di raggiungibilità trasposta R^T

L'insieme di non osservabilità di un sistema (A, b, c) coincide sempre con

[1] l'origine dello spazio di stato del sistema
[2] il sottospazio immagine (span) della matrice di osservabilità O
[3] lo spazio nullo (kernel) della matrice di osservabilità O
[4] il sottospazio immagine (span) della matrice di osservabilità trasposta O^T

Il movimento forzato del sistema lineare (A, b) è ottenuto per

[1] $x(0)$ non nullo, $u(t)$ nullo
[2] $x(0)$ non nullo, $u(t)$ non nullo
[3] $x(0)$ nullo, $u(t)$ non nullo
[4] $x(0)$ nullo, $u(t)$ nullo

In un sistema lineare (A, b) asintoticamente stabile, sottoposto a ingresso costante $u(t) = \bar{u} \neq 0$, il movimento $x(t)$, per $t \to \infty$:

[1] tende a 0 da qualunque stato iniziale
[2] diverge, per almeno qualche stato iniziale
[3] tende a uno stato di equilibrio, da qualunque stato iniziale
[4] tende a uno stato di equilibrio, da stato iniziale opportuno (bacino di attrazione)

5)
Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = cx(t)$$

Si definiscano la nozione di *impulso* e di *risposta all'impulso*, esprimendo poi quest'ultima in funzione di A, b, c (non è richiesta dimostrazione).

Calcolare quindi la risposta all'impulso del sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6)
Si vogliono tracciare in Matlab i diagrammi di Bode del sistema definito da

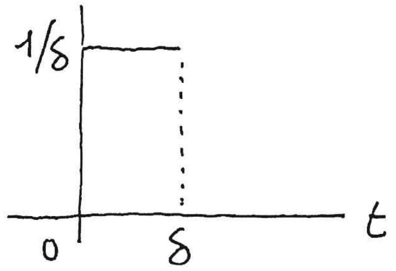
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual è la sequenza di comandi da digitare?

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

5

L'impulso imp(t) è il segnale ottenuto come limite per $\delta \to 0$ del segnale in figura, detto "impulso di durata finita":



La risposta all'impulso $g(t)$ è l'uscita del sistema (A, b, c) quando $u(t) = imp(t)$ e $x(0) = 0$, e risulta data da $g(t) = c e^{At} b$.

$e^{At} = I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots$; nell'esempio dato $A^2 = 0$ e, in generale, $A^k = 0 \ \forall k \geq 2$.

Quindi: $e^{At} = I + At = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

da cui $g(t) = c e^{At} b = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = t$

6

```
A = [-1 2 ; 0 -2]
b = [0 ; 1]
c = [1 0]
sys = ss(A,b,c,0)
bode(sys)
```