



**POLITECNICO
MILANO 1863**

SOWALON

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 11/1/2022

COGNOME: _____ NOME: _____

CODICE PERSONA: _____

Firma dello studente: _____ Visto del docente: _____

7	7	7	4	5	2
---	---	---	---	---	---

Voto totale

32

ATTENZIONE !

- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

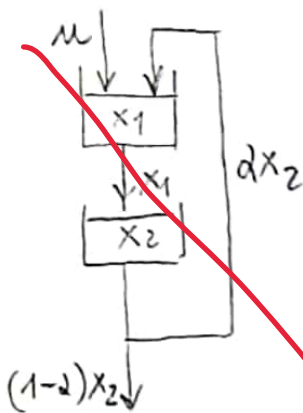
1)

Una rete idrica è composta da due serbatoi identici (con costante di deflusso unitaria) posti in cascata. Il serbatoio a valle è alimentato dall'intera portata uscente dal serbatoio a monte, mentre la frazione α ($0 < \alpha < 0.25$) della sua portata uscente risale ad alimentare il serbatoio a monte (la frazione $1 - \alpha$ esce invece dal sistema defluendo verso valle). Il serbatoio a monte è alimentato, oltre che dalla frazione di scarico sopra menzionata del serbatoio a valle, da una portata di ingresso u .

I serbatoi sono inizialmente vuoti. Nell'intervallo $0 < t < 10$ viene applicata una portata di ingresso costante $u(t) = \bar{u} > 0$, mentre nel successivo intervallo $10 < t < 20$ la portata d'ingresso è nulla.

Tracciare, nel piano di stato, la traiettoria seguita dal sistema nell'intervallo $0 < t < 20$ partendo dallo stato iniziale $x(0) = 0$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



$$\dot{x}_1 = u - x_1 + \alpha x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = -2 < 0$$

$$\det(A) = 1 - \alpha > 0$$

→ A.S.

Equilibrio

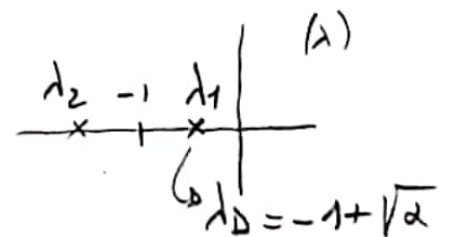
$$-x_1 + \alpha x_2 + u = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{1-\alpha} \bar{u}$$

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 = \frac{1}{1-\alpha} \bar{u}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - \alpha = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\alpha}$$



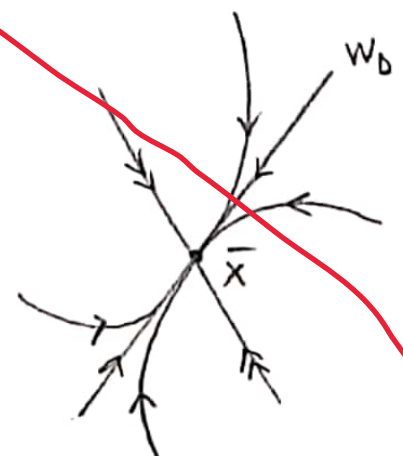
$$Aw = \lambda w$$

$$\begin{vmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$$-w_1 + \alpha w_2 = \lambda w_1 \rightarrow w_2 = \frac{1+\lambda}{\alpha} w_1$$

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{\alpha} \rightarrow w_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} w_1 \rightarrow w_D$$

$$\lambda_2 = -1 - \sqrt{\alpha} \rightarrow w_2 = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} w_1$$



$$\lambda_D = -1 + \sqrt{2}$$

Poiché $0 < d < 0,25 \rightarrow -1 < \lambda_D < -0,5$ ($T_D = -\frac{1}{\text{Re}(\lambda_D)}$)
 $1 < T_D < 2$
 $5 < T_R < 10$ ($T_R = 5 T_D$)

Pertanto, $\forall d$, in al più 10 unità di tempo il sistema raggiunge l'equilibrio

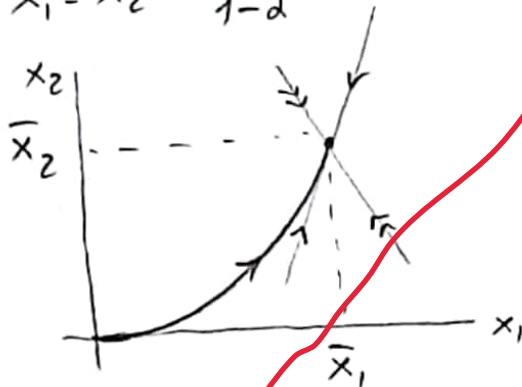
$0 < t < 10$ $u = \bar{u}$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{1}{1-d} \bar{u}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = \bar{u} > 0$$

$$\dot{x}_2(0) = 0$$



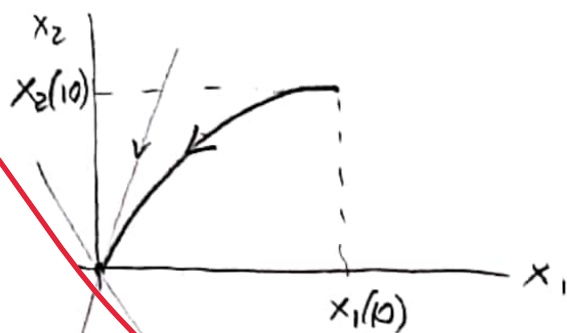
$10 < t < 20$ $u = 0$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$$

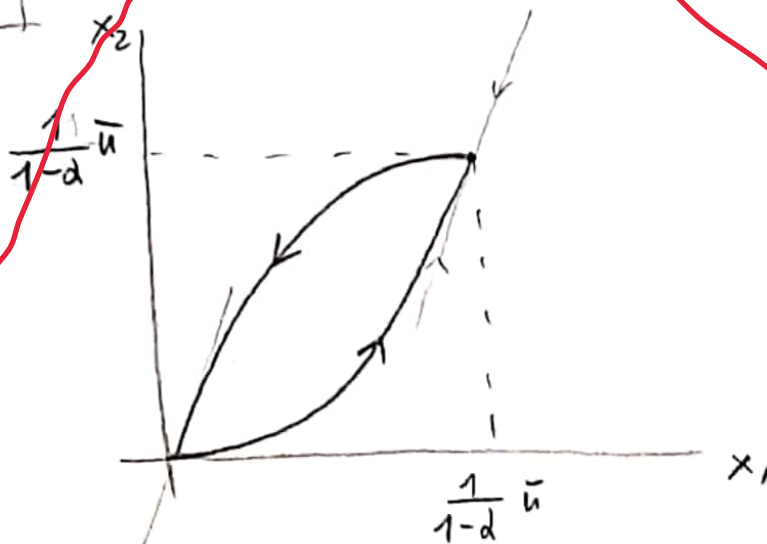
$$x_1(10) = x_2(10) = \frac{1}{1-d} \bar{u}$$

$$\dot{x}_1(10) = -\frac{1}{1-d} \bar{u} + \frac{d}{1-d} \bar{u} = -\bar{u} < 0$$

$$\dot{x}_2(10) = 0$$



$0 < t < 20$



2)

Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + u$$

$$y = x_1$$

a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.

b) Progettare un ricostruttore asintotico dello stato tale che l'errore di stima vada a zero (approssimativamente) in 0.5 unità di tempo.

c) Progettare una legge di controllo tale che il sistema controllato (sistema + ricostruttore dello stato progettato al punto precedente + legge di controllo) abbia un tempo di risposta pari (approssimativamente) a 5 unità di tempo.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = 2 \rightarrow \text{inst}$$

$$R = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(R) = 1 \neq 0 \rightarrow CR$$

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(O) = -1 \neq 0 \rightarrow CO$$

$$b) \ell / \text{tr}(A + \ell c) = 0,5 \rightarrow T_D = 0,1 \rightarrow \text{Re}(\lambda_D) = -10$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -10$$

$$A + \ell c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \ell_1 & -1 \\ 2 + \ell_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A + \ell c) = 2 + \ell_1 = -10 - 10 \rightarrow \ell_1 = -22$$

$$\det(A + \ell c) = 1 + \ell_1 + 2 + \ell_2 = (-10)(-10) \rightarrow \ell_2 = 119$$

$$\ell = \begin{bmatrix} -22 \\ 119 \end{bmatrix}$$

$$c) T_e(A+bk) = S \rightarrow T_D = I \rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_D) = -1$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

$$A+bk = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} |k_1 \quad k_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2+k_1 & 1+k_2 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A+bk) = 2+k_2 = -1-1 \rightarrow k_2 = -4$$

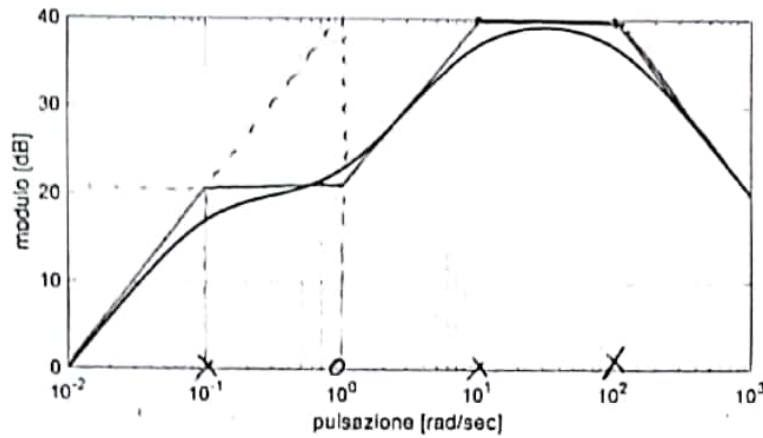
$$\det(A+bk) = 1+k_2 + 2+k_1 = (-1)(-1) \rightarrow k_1 = 2$$

$$k = \begin{vmatrix} 2 & -4 \end{vmatrix}$$

3)

Mediante una serie di esperimenti si è ricavato il diagramma di Bode del modulo della funzione di trasferimento di un sistema lineare a tempo continuo asintoticamente stabile. Si sa inoltre che la fase del sistema tende a 90° quando la pulsazione ω tende a 0, mentre tende a -270° quando ω tende all'infinito.

x |polo|
o |zero|

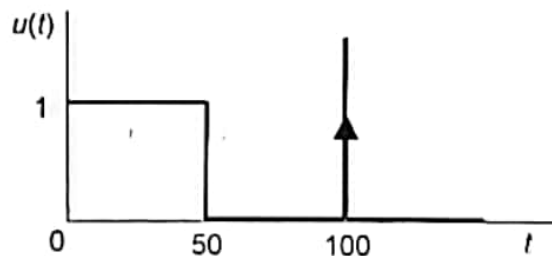


a) Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i risultati degli esperimenti. Tracciare il corrispondente diagramma approssimato di Bode della fase.

b) Determinare, ricavando dai diagrammi di Bode (anche approssimati) le informazioni necessarie, l'uscita a transitorio esaurito quando

$$u(t) = -10 + 0.1 \sin(30t)$$

c) Determinare (in modo qualitativo) la risposta del sistema all'ingresso rappresentato nella figura seguente (la linea verticale con freccia rappresenta un impulso unitario).



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a)

zero nell'origine

$$|M|_{dB} = 40 \text{ dB} \rightarrow |M| = 100 \rightarrow M = +100 \quad \left(\begin{matrix} \varphi \rightarrow +90^\circ \\ \omega \rightarrow 0 \end{matrix} \right)$$

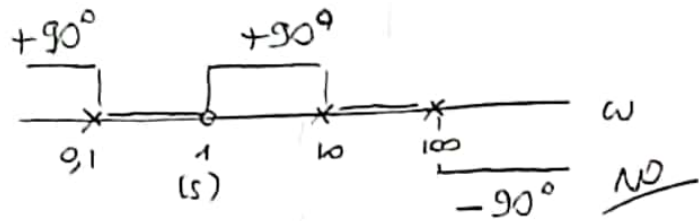
poli AS in $-10, -0,1, -100$

|zero| in 1

$$G(s) = 100 s \frac{1 \pm s}{(1+10s)(1+0,1s)(1+0,01s)}$$

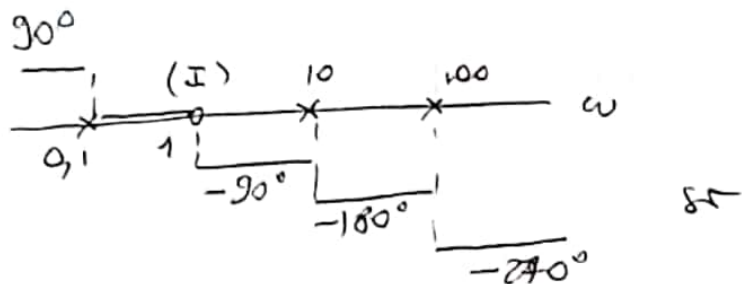
zero stabile
(1+s)

$$\varphi = \angle G$$



zero instabile
(1-s)

$$\varphi = \angle G$$



$$G(s) = 100 s \frac{1-s}{(1+10s)(1+0,1s)(1+0,01s)}$$

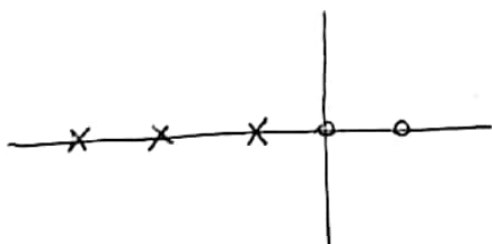
b) $y''(t) = -10 \cdot G(s) + 0,1 |G(30i)| \text{ sen}(30t + \angle G(30i))$

$$G(s) = 0 \quad |G(30i)|_{dB} = 40 \text{ dB} \rightarrow |G(30i)| = 100$$

$$\angle G(30i) = -\pi$$

$$y''(t) = 10 \text{ sen}(30t - \pi)$$

c) Risposta a scalino $r=1$ $y(0)=0$ $y'(0) = \frac{-100}{0,01} < 0$
 $y_{\infty} = G(0) = 0$

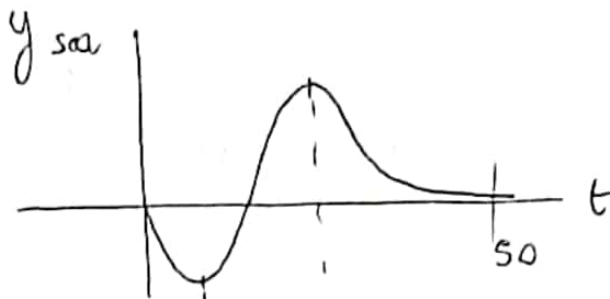


$$m_s = 2$$

$$\delta = 0$$

$$\Rightarrow N = 2$$

$$\lambda_D = -0,1 \quad T_D = 10 \quad T_R = 50$$

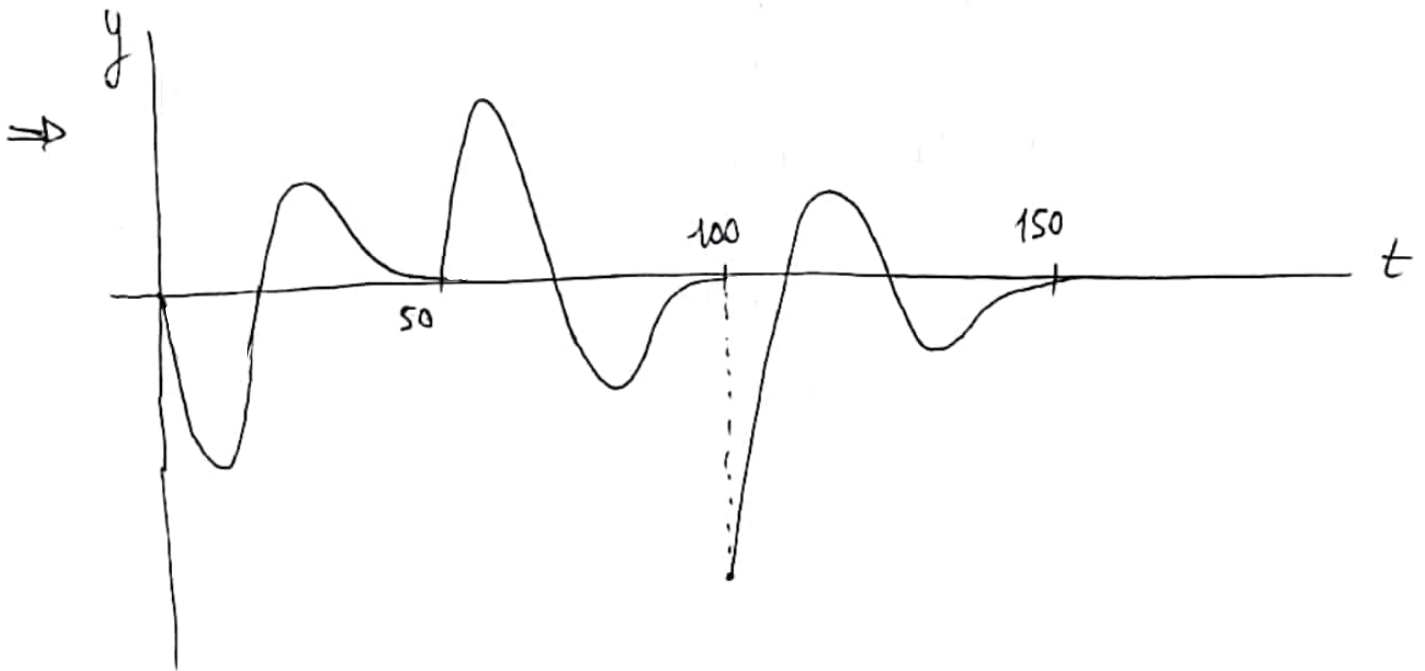
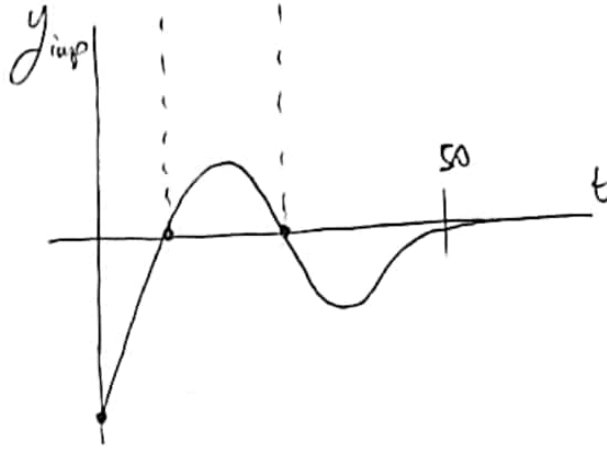


Risposta a impulso



derivata della
risposta a
scalino

$$y_{imp} = \frac{dy_{sca}}{dt}$$



4)

**Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = - 0.5, risposta non data = 0)**

Gli autovalori di un sistema lineare a tempo continuo sono $\{0, -1, -10\}$.

- [1] il sistema è asintoticamente stabile
- [2] il sistema è semplicemente stabile
- [3] il sistema è instabile
- [4] non è possibile affermare nulla sulla stabilità del sistema

Gli autovalori dello Jacobiano di un sistema non lineare a tempo continuo, calcolato nell'intorno di un equilibrio, sono $\{0, -1, -10\}$.

- [1] l'equilibrio è asintoticamente stabile
- [2] l'equilibrio è stabile ma non asintoticamente stabile
- [3] l'equilibrio è instabile
- [4] non è possibile affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio

Il sistema lineare con funzione di trasferimento $G(s) = 0.01s/((s + 1)(s + 2)^2)$ è un filtro

- [1] passa basso
- [2] passa alto
- [3] passa banda
- [4] elimina banda

Un sistema di controllo ha funzione di trasferimento d'anello $L(s) = 10/s$. Il sistema di controllo:

- [1] è asintoticamente stabile
- [2] è semplicemente stabile
- [3] è instabile
- [4] non è possibile affermare nulla sulla stabilità del sistema di controllo

5)

Definire il concetto di sistema $x(t + 1) = Ax(t) + bu(t)$ "a memoria finita".

Proporre quindi un esempio numerico di sistema a memoria finita di ordine $n = 2$ con A, b non nulli, calcolando il movimento $x(1), x(2), \dots$ a partire da $x(0) = 0$ quando $u(t) = 1$ per ogni t .

6)

Si scriva la sequenza di istruzioni Matlab per simulare e visualizzare l'evoluzione del sistema $x(t + 1) = -0.5x(t) + 1$ per 5 istanti di tempo a partire da stato iniziale nullo.

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

5)

Il sistema a tempo discreto $x(t+1) = Ax(t) + bu(t)$ si dice "a memoria finita" se il suo movimento libero si azzerà in tempo finito per ogni stato iniziale, cioè se esiste $m > 0$ (intero) tale che $\phi(m)x(0) = A^m x(0) = 0 \quad \forall x(0)$.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad , \quad x(0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x(1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x(2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x(3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} 1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} = x(4) = x(5) = \dots$$

$$6) \gg \text{ sistema } = \text{ ss } (-0.5, 1, 0, 0, 1)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $A \quad b \quad c \quad d$

\rightarrow il sistema è a tempo discreto!

$\gg u = \text{ones}(5, 1) \rightarrow$ ingresso costante e pari a 1 per 5 unità di tempo

$\gg t = 0:5 \rightarrow$ vettore degli istanti di tempo

$\gg [y, t, x] = \text{lssim}(\text{sistema}, u, t)$
 \rightarrow ^{simulazione:} la condizione iniziale (se non specificata) è già supposta nulla!

$\gg \text{stairs}(t, x)$

\rightarrow visualizza il grafico