POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 4/9/2021

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

7	7	7	4	5	2		Voto totale 32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)

Le autovetture circolanti sono suddivise in tre categorie tecnologiche: a motore termico (benzina/diesel), a motore ibrido e a propulsione puramente elettrica. Le emissioni medie annuali di CO_2 per ogni autovettura sono stimate in 1000 kg per il termico e 200 kg per l'ibrido (l'elettrico non produce emissioni).

Ogni tre anni tutti i proprietari cambiano la propria auto (si assuma che ogni individuo possieda un'unica autovettura): la frazione α di chi possiede un'autovettura con motore termico ne acquista una con la stessa tecnologia, mentre la frazione β acquista un'auto ibrida. La frazione γ di chi possiede un'autovettura ibrida riacquista un'autovettura ibrida, mentre la frazione δ passa a un'autovettura puramente elettrica. Infine, tra chi possiede un'autovettura elettrica, la frazione ε ne acquista una della stessa tecnologia, mentre la frazione θ ritorna all'ibrido. Infine, vi sono $u(t)$ nuovi acquirenti ogni triennio, i quali scelgono solo autovetture a motore termico.

I valori dei parametri sono: $\alpha = 0.9$; $\beta = 0.1$; $\gamma = 0.7$; $\delta = 0.1$; $\varepsilon = 0.8$; $\theta = 0.1$.

a) Descrivere il fenomeno in esame mediante un sistema lineare in cui l'uscita $y(t)$ sia il livello di emissioni prodotto dal parco autovetture circolante (CO_2 complessivamente emessa nel triennio), verificandone l'asintotica stabilità.

b) Determinare all'equilibrio il livello di emissioni, in funzione del numero (costante) di nuovi acquirenti $\bar{u}$.

Si supponga ora che vi siano interessanti incentivi all'acquisto delle autovetture puramente elettriche. Come conseguenza, ogni triennio, una frazione φ dei proprietari di autovetture a motore termico, intenzionati a riacquistare un'autovettura dello stesso tipo, decide invece di acquistarne una puramente elettrica.

c) Determinare il valore di φ che genera a regime un numero di autovetture elettriche doppio di quelle a motore termico.

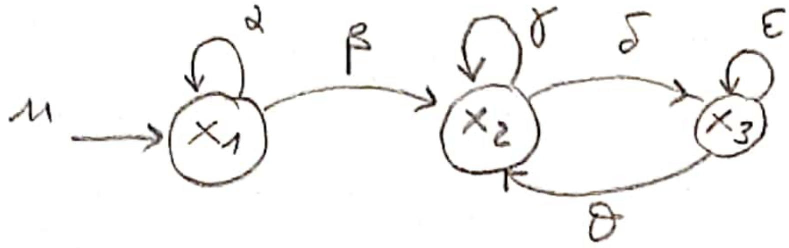
d) Per il valore di φ ottenuto al punto precedente, verificare la stabilità del sistema e valutare il nuovo valore di emissioni a regime.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

1a) $x_1(t) = \#$ auto motore termico $\qquad t = $ triennio

$x_2(t) =$ " ibride

$x_3(t) =$ " elettriche



$$x_1(t+1) = \alpha x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = \beta x_1(t) + \gamma x_2(t) + \vartheta x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = \delta x_2(t) + \varepsilon x_3(t)$$

$$\Rightarrow x_1(t+1) = 0{,}9 x_1(t) + u(t)$$
$$x_2(t+1) = 0{,}1 x_1(t) + 0{,}7 x_2(t) + 0{,}1 x_3(t)$$
$$x_3(t+1) = 0{,}1 x_2(t) + 0{,}8 x_2(t)$$
$$y(t) = 3\left[1000\, x_1(t) + 200\, x_2(t)\right]$$

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 3000 & 600 & 0 \end{vmatrix} \quad d = 0$$

$A, b, c \geq 0 \rightarrow$ Sistema positivo

$\sum$ righe $= 0{,}9$

$\Downarrow$

$\lambda_D = 0{,}9$

$\Downarrow$

A.S.

1b) All'equilibrio

$x_1 = 0,9\,x_1 + u \rightarrow \bar{x}_1 = 10\,\bar{u}$

$x_2 = 0,1\,x_1 + 0,7\,x_2 + 0,1\,x_3 \rightarrow 3x_2 = 10u + x_3$

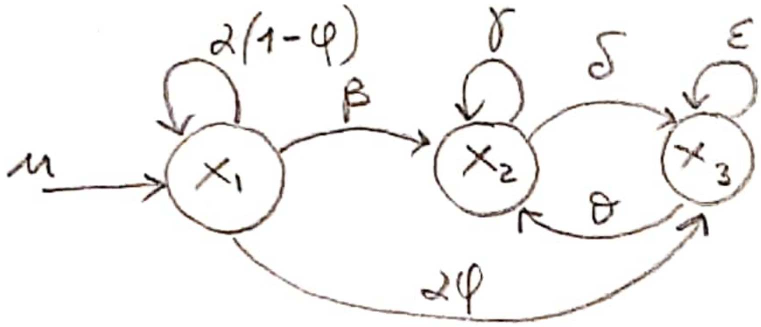
$x_3 = 0,1\,x_2 + 0,8\,x_3 \rightarrow x_2 = 2x_3$

$5x_3 = 10u$

$\hookrightarrow \bar{x}_3 = 2\bar{u} \quad \bar{x}_2 = 4\bar{u}$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{vmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{vmatrix} \bar{u} \qquad \bar{y} = 3000\,\bar{x}_1 + 600\,\bar{x}_2 = 32\,400\,\bar{u}$$

1c)



$x_1(t+1) = 0,9(1-\varphi)\,x_1(t) + u(t)$

$x_2(t+1) = 0,1\,x_1(t) + 0,7\,x_2(t) + 0,1\,x_3(t)$

$x_3(t+1) = 0,9\,\varphi\,x_1(t) + 0,1\,x_2(t) + 0,8\,x_3(t)$

$y(t) = 3\left[1000\,x_1(t) + 200\,x_2(t)\right]$

All'equilibrio $\bar{x}_3 = 2\bar{x}_1$

$x_2 = 0,1\,x_1 + 0,7\,x_2 + 0,1\,x_3 \rightarrow 3x_2 = x_1 + x_3 \rightarrow 3x_2 = 3x_1 \rightarrow x_2 = x_1$

$x_3 = 0,9\,\varphi\,x_1 + 0,1\,x_2 + 0,8\,x_3$

$\hookrightarrow 2x_3 = 9\varphi\,x_1 + x_2 \longrightarrow \dots$

$$\cdots \rightarrow 4x_1 = 9\varphi x_1 + x_1 \rightarrow 4 = 9\varphi + 1 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{3}$$

1d)

$$A = \begin{vmatrix} 0{,}9(1-\varphi) & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}9\varphi & 0{,}1 & 0{,}8 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{c|cc} 0{,}6 & 0 & 0 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ * & A_{22} \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ A.S.

$$0{,}8 \leq \lambda_D \leq 0{,}9 \rightarrow \text{A.S.}$$

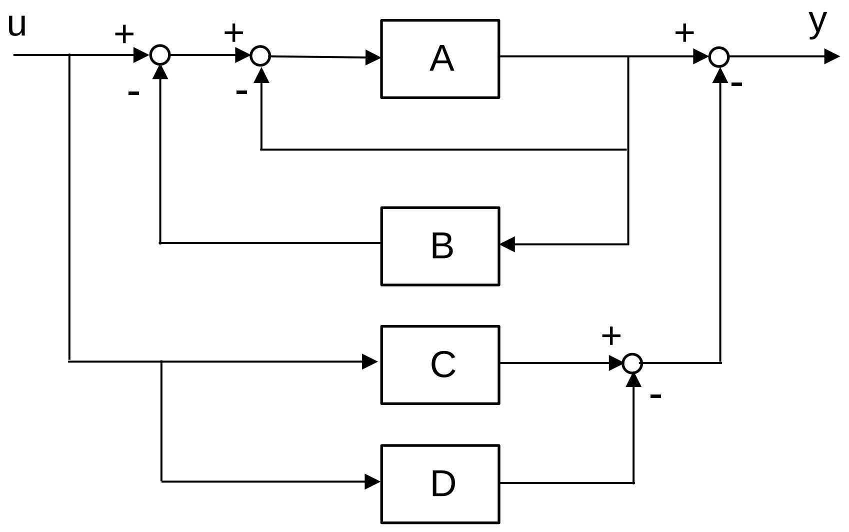
$$\{\lambda\}_A = \{\lambda\}_{A_{11}} \cup \{\lambda\}_{A_{22}}$$

Essendo A_{11} e A_{22} A.S., lo è anche A

$$x_1 = 0{,}6\, x_1 + u \rightarrow \bar{x}_1 = \frac{5}{2}\bar{u} = \bar{x}_2$$

$$\bar{y} = 3\left[1000\,\bar{x}_1 + 200\,\bar{x}_2\right] = 9000\,\bar{u}$$

2)
Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura.



La risposta a scalino unitario del blocco B è pari a $\frac{1}{5}(1 - e^{-5t})$, il blocco C è descritto dal modello ingresso/uscita $\ddot{y}_C + 5\dot{y}_C + 6y_C = \dot{u}_C - 2u_C$, mentre il blocco D è descritto dalla matrice di stato

$$A_D = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

a) Dopo aver dimostrato che il blocco B è caratterizzato dalla funzione di trasferimento $G_B(s) = \frac{1}{s+5}$, proporre per il blocco A una qualunque funzione di trasferimento propria di ordine 1 che renda il sistema aggregato asintoticamente stabile.

b) Per la scelta di A effettuata al punto precedente, valutare tutte le costanti di tempo del sistema aggregato, il tempo di risposta e discutere l'eventuale presenza di oscillazioni infinite.

c) Si discuta come cambierebbe la stabilità dell'aggregato se il blocco C fosse ora descritto dal modello $\dddot{y}_C + \ddot{y}_C + 5\dot{y}_C + 6y_C = \dot{u}_C - 2u_C$.

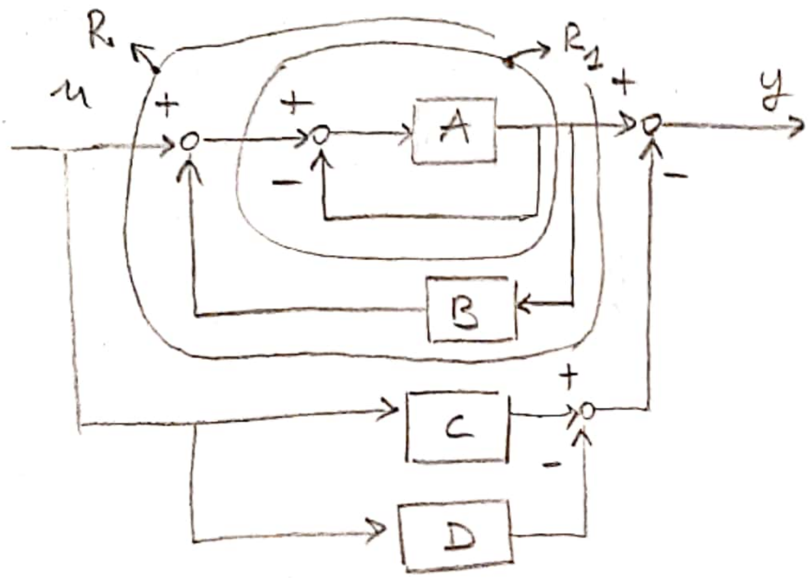
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

2a) $Y_{sca} = \frac{1}{s} G_B(s)$

$$Y_{sca} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{5}\left(1 - e^{-5t}\right)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{5}\right] - \mathcal{L}\left[\frac{1}{5}e^{-5t}\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s+5} = \frac{\cancel{s}+5-\cancel{s}}{5s\cdot(s+5)} = \frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{5}s(s+5)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s(s+5)} = \frac{1}{s}\cdot G_B(s) \Longrightarrow G_B(s) = \frac{1}{s+5}$$



$\Sigma' = R \,//\, C \,//\, D$

Σ' è A.S. $\Longleftrightarrow$ R, C e D sono A.S.

- Stabilità di G $\rightsquigarrow$ $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda+3)(\lambda+2) = 0$

  $\{\lambda\}_G = \{-2, -3\} \to$ G è A.S.

- Stabilità di D

  tr $= -4$ det $= 4$ $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$

$$A_D = \left|\begin{array}{cc|cc|c} -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right|$$

$\{\lambda\}_D = \{-2, -2, -3, -4, -5\}$

D è A.S.

• Stabilità di R

$$R_1 = \frac{A}{1+A} \qquad R = \frac{R_1}{1+R_1 B} = \frac{\frac{A}{1+A}}{1+\frac{A}{1+A}B} = \frac{A}{1+A+AB}$$

$$A = \frac{\alpha}{s+\beta} \qquad B = \frac{1}{s+5}$$

$$R = \frac{\frac{\alpha}{s+\beta}}{1+\frac{\alpha}{s+\beta}+\frac{\alpha}{(s+\beta)(s+5)}} = \frac{\alpha(s+5)}{(s+\beta)(s+5)+\alpha(s+5)+\alpha}$$

$$R = \frac{\alpha(s+5)}{s^2+s(\alpha+\beta+5)+5\beta+6\alpha}$$

$\alpha = 3 \quad \beta = -2 \quad \rightarrow s^2+6s+8 = (s+2)(s+4) = 0$

$\{\lambda\}_R = \{-2,-4\} \rightarrow R$ è A.S.

$$\Longrightarrow \boxed{G_A(s) = \frac{3}{s-2}}$$

2b) $\{\lambda\}_\Sigma = \{\lambda\}_R \cup \{\lambda\}_C \cup \{\lambda\}_D =$

$= \{-2,-4,-2,-3,-2,-2,-3,-4,-5\}$

$\{T\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 5\}$

$T_D = \frac{1}{2} \qquad T_R = 5T_D = \frac{5}{2}$

$\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \nexists$ oscillazioni

2c) $s^3 + s^2 + 5s + 6 = 0$

$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 5 \qquad \alpha_3 = 6$

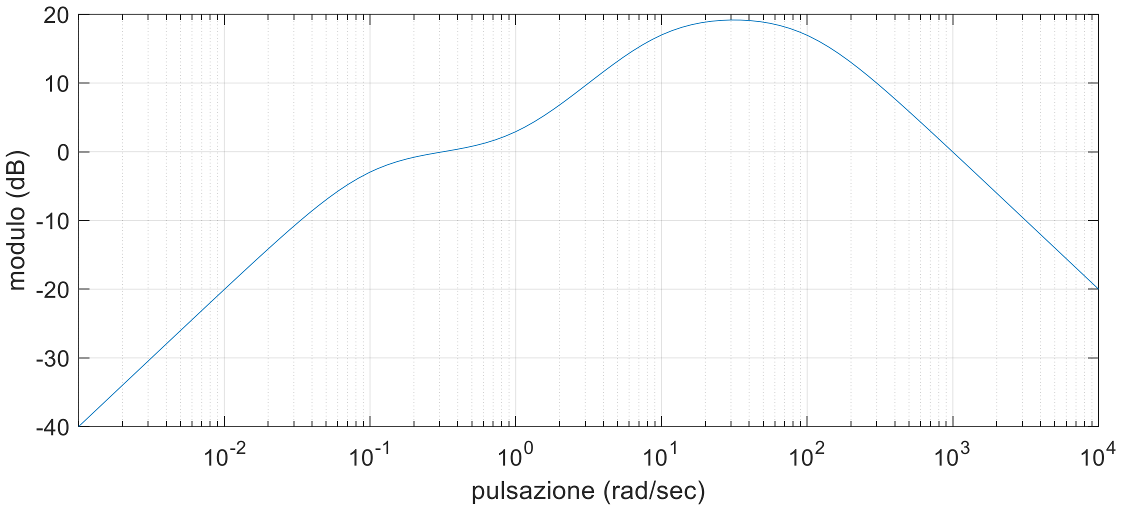
Hurwitz
$n = 3$

$\alpha_i > 0 \;\; \forall i$

$\alpha_1 \alpha_2 = 5 \not> \alpha_3 = 6 \Rightarrow$ C non è A.S.

con come Σ_1

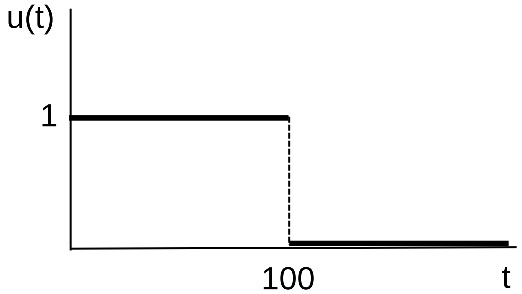
3)
Mediante esperimenti condotti applicando a un sistema lineare segnali sinusoidali a varie frequenze, si è ricavato il seguente diagramma di Bode del modulo.



Si è inoltre rilevato che lo sfasamento introdotto dal sistema tende a $\frac{1}{2}\pi$ per $\omega \to 0$ e a $-\frac{3}{2}\pi$ per $\omega \to \infty$.

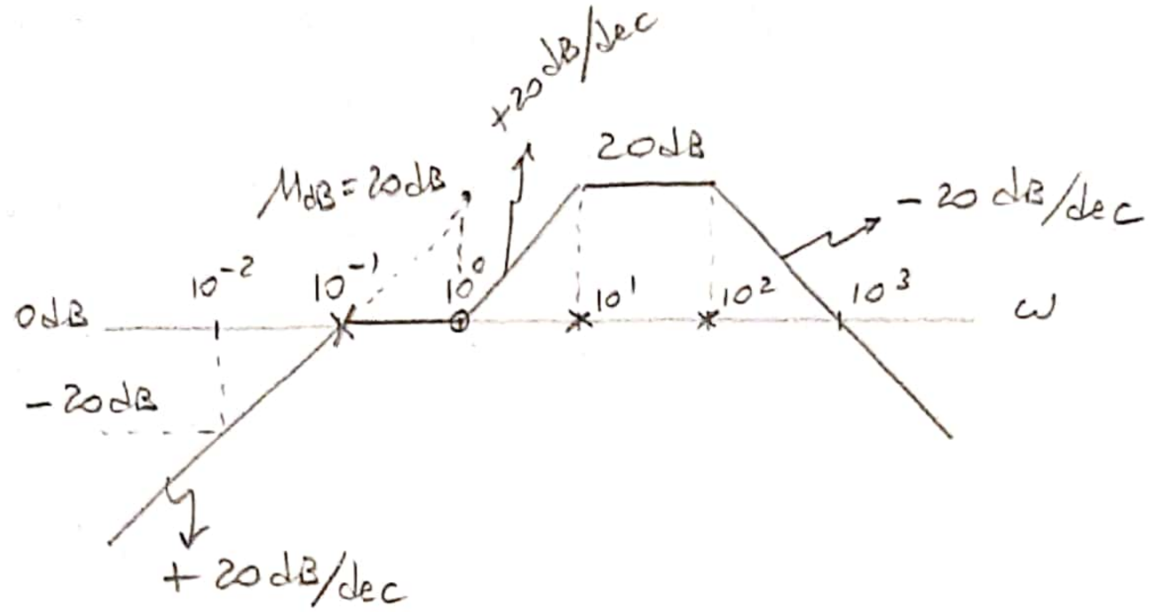
a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con i risultati degli esperimenti sopra riportati. Per la scelta effettuata si tracci il corrispondente diagramma approssimato della fase.

b) Determinare qualitativamente e tracciare graficamente l'uscita del sistema corrispondente al segnale di ingresso mostrato in figura



Soluzione [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

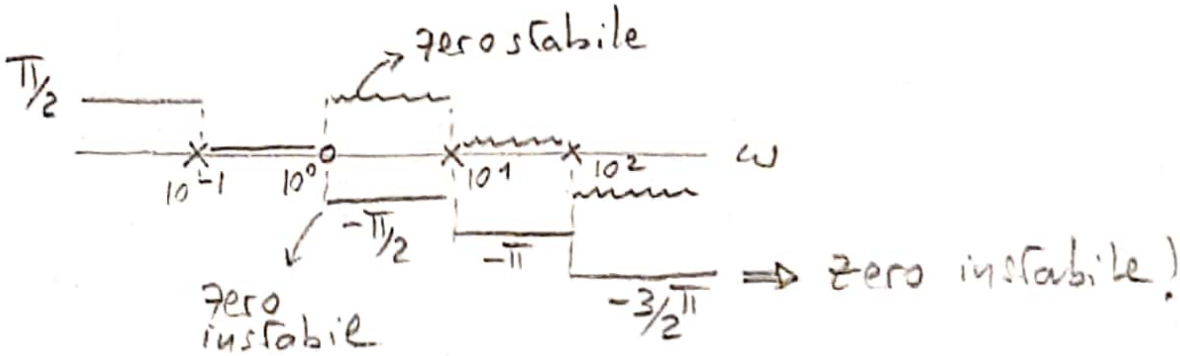
3a) Diagramma di Bode approssimato del $|G(i\omega)|_{dB}$



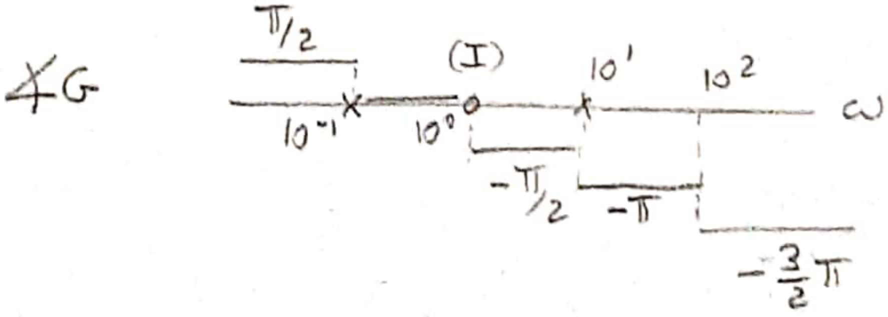
poli → stabili, di modulo 10^{-1}, 10^{1}, 10^{2}

zero, di modulo 10^{0}

zero nell'origine → poiché $\angle G \xrightarrow[\omega \to 0]{} \pi/2 \Rightarrow \mu > 0 \to \mu = 10$



$$G(s) = 10\,s\,\frac{(1-s)}{(1+10s)(1+0{,}1s)(1+0{,}01s)}$$

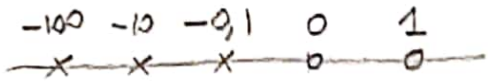


3b) $u(t) = sca(t) - sca(t-100)$

$p_D = -10^{-1} \rightarrow T_D = 10$ e $T_R = 50$

$r = 1 \rightarrow y_{sca}(0) = 0 \qquad \dot{y}_{sca}(0) = \dfrac{10(-1)}{10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}01} < 0$

$$y_{sca}^{\infty} = G(0) = 0$$



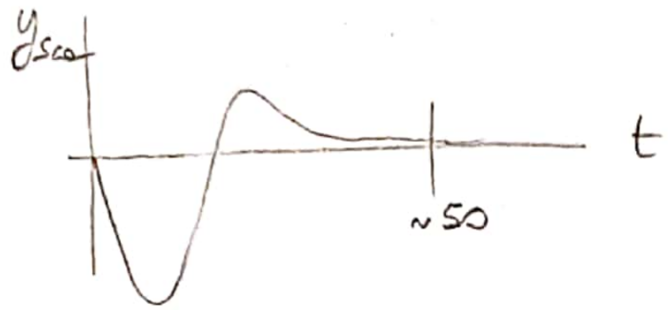
o = zero

x = polo

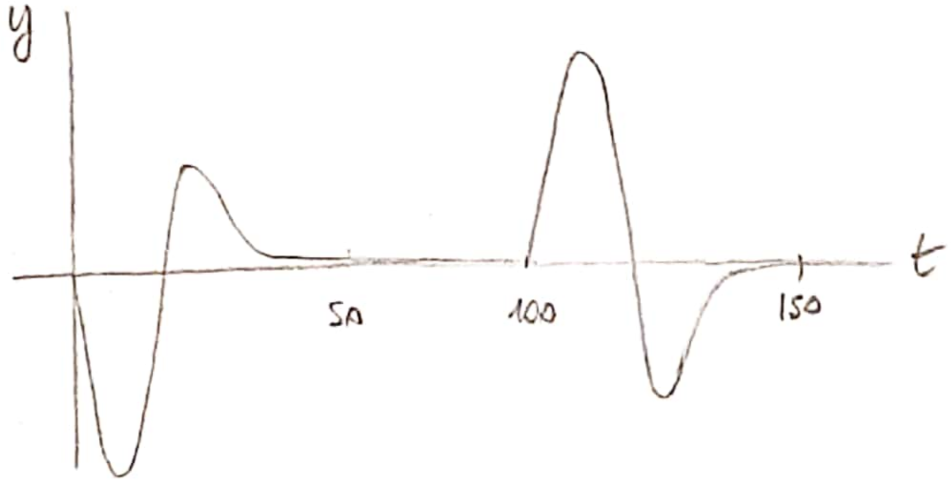
$m_s = 2$

$\delta = 0 \rightarrow N = 2$

Risposta a scalino



e



4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

Si consideri un sistema lineare asintoticamente stabile di ordine n. Senza altre informazioni, si può affermare che

- [1] il sistema è completamente raggiungibile
- [2] il sistema è completamente osservabile
- [3] il sistema è stabilizzabile
- [4] la funzione di trasferimento ha denominatore di grado n

In un sistema lineare a tempo continuo di ordine $n = 5$, la matrice A ha polinomio caratteristico $\Delta_A(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + 10\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 5$. Senza fare alcun calcolo, si può affermare che

- [1] il sistema è asintoticamente stabile
- [2] il sistema è instabile
- [3] il sistema è semplicemente stabile
- [4] non si può concludere nulla sulla stabilità del sistema

In un sistema lineare di ordine $n = 3$, la matrice di osservabilità O ha rango uguale a 1. Gli stati non osservabili formano un sottospazio X_{NO} di dimensione

- [1] 0
- [2] 1
- [3] 2
- [4] 3

Un sistema (A, b, c, d) a tempo discreto, esternamente stabile, è sottoposto a un ingresso $u(t)$ estratto casualmente, in ogni istante t, tra i tre valori $\{-1,0,1\}$. Senza altre informazioni, si può affermare che l'uscita $y(t)$ del sistema

- [1] è limitata, qualunque sia lo stato iniziale
- [2] è limitata, per ogni stato iniziale avente norma sufficientemente piccola
- [3] è limitata, per stato iniziale nullo
- [4] è illimitata per ogni stato iniziale

5)
Si consideri un sistema di controllo (schema a blocchi consueto con retroazione negativa) con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$.

a) Si enunci il criterio di Bode per la stabilità del sistema di controllo, distinguendo chiaramente le condizioni di applicabilità del criterio da quelle necessarie e sufficienti per la stabilità.
b) Si proponga una funzione di trasferimento d'anello $L(s)$ di ordine 2 (quindi con due poli) e con $\mu > 0$, che sia esternamente stabile ma dia luogo a un sistema di controllo instabile, verificandolo con il criterio di Bode.

6)
Sia dato il sistema lineare

$$x_1(t+1) = -2x_1(t) + x_2(t) - u(t)$$
$$x_2(t+1) = -3x_1(t) + 5x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

a) Quali comandi Matlab si devono digitare per studiare la completa raggiungibilità e completa osservabilità del sistema?
b) Quali comandi Matlab si devono digitare per progettare un regolatore stabilizzante che annulli tutti i transitori del sistema regolato in tempo finito?

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

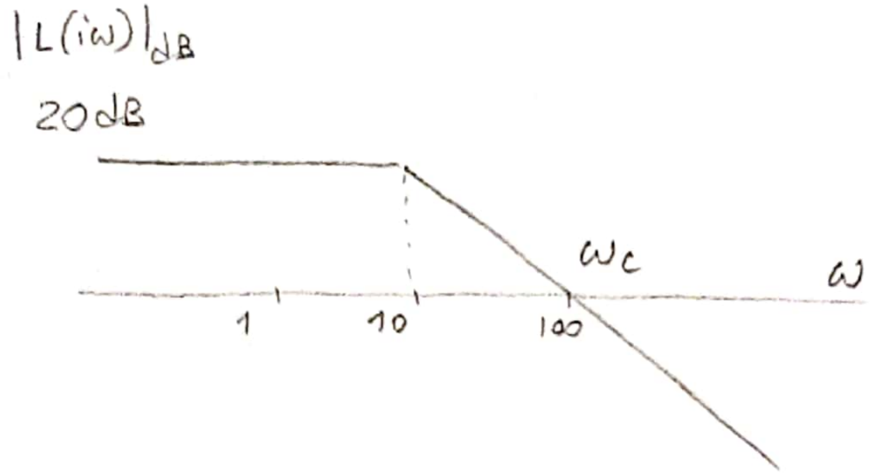
5a) Si consideri il sistema di controllo con funzione di trasferimento di anello propria

$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1+s\tau_i)}{\prod_i (1+sT_i)}$$

Si supponga che (CONDIZIONI DI APPLICABILITÀ):
1) $L(s)$ non ha poli p_i con parte reale positiva
2) $|L(i\omega)| = 1$ in una e una sola frequenza $\omega = \omega_c$

Allora il sistema di controllo $H(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$ è esternamente stabile se e solo se
a) $\mu > 0$
b) $\varphi_m > 0$ dove $\varphi_m = \pi - |\varphi_c|$ e $\varphi_c = \arg L(i\omega_c)$

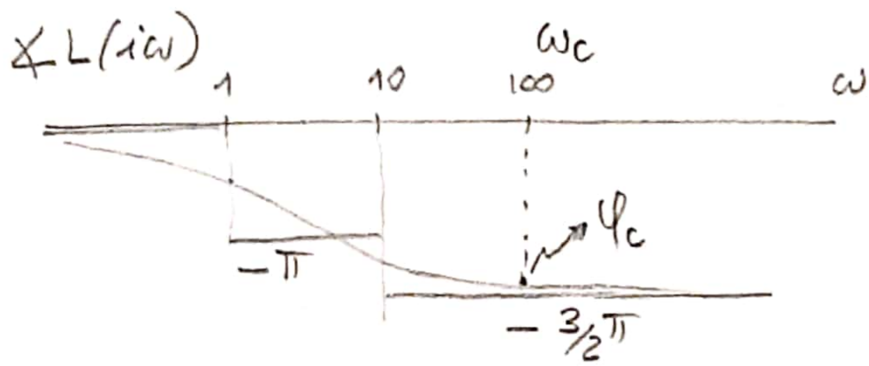
5b) $L(s) = 10 \dfrac{(1-s)}{(1+s)(1+0{,}1s)}$



$\omega_c \simeq 100$

$\varphi_c \simeq -\frac{3}{2}\pi$

$\varphi_m \simeq -\pi/2 < 0$



6a) $A = [-2 \ \ 1 ; \ -3 \ \ 5]$
$b = [-1 \ \ 1]'$
$c = [1 \ \ 1]$

Raggiungibilità $\quad R = \mathrm{ctrb}(A, b)$
$\mathrm{det}(R)$

Osservabilità $\quad \theta = \mathrm{obsv}(A, c)$
$\mathrm{det}(\theta)$

6b) Tempo finito → $A+bk$ e $A+lc$ devono avere $\lambda_i = 0$

$k = \mathrm{acker}(A, -b, [0 \ \ 0])$

$l = \mathrm{acker}(A', -c', [0 \ \ 0])$