POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 5/7/2021

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

CODICE PERSONA: ________________________

Firma dello studente: ____________________________ Visto del docente:_____

						Voto totale
7	7	7	4	5	2	32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

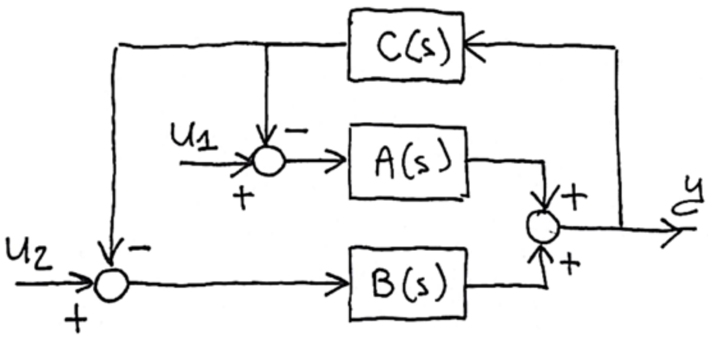
1)
Si consideri il sistema lineare a tempo continuo descritto da

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & p \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Discuterne la stabilità per ogni valore di $p \in (-\infty, +\infty)$, calcolando inoltre il tempo di risposta nel caso di asintotica stabilità.
~~b) Disegnare il quadro delle traiettorie nel piano (x_1, x_2) nei tre casi seguenti ($\bar{u}$ indica un ingresso costante): 1) $p = 0, \bar{u} = 0$; 2) $p = 2, \bar{u} = 0$; 3) $p = -5, \bar{u} = 4$.~~
c) Discutere la completa raggiungibilità per ogni valore di $p \in (-\infty, +\infty)$.
d) Determinare i poli per ogni valore di $p \in (-\infty, +\infty)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

2)
Si consideri il sistema a tempo continuo in figura, i cui tre blocchi sono descritti dalle funzioni di trasferimento $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$.



a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascun ingresso e l'uscita, esprimendola in funzione di $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$.
b) Si ponga ora

$$A(s) = \frac{1}{s} \quad , \quad B(s) = \frac{1}{s+2} \quad , \quad C(s) = 1$$

Studiare la stabilità esterna del sistema tra ciascun ingresso e l'uscita.
c) Determinare $y(t)$ in forma esatta (analitica) quando $u_1(t) = u_2(t) = sca(t)$.
d) Determinare $y(t)$ in forma qualitativa quando $u_1(t) = sca(t)$ e $u_2(t) = sca(t-10)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

3)
Il sistema non lineare a tempo continuo $\dot{x} = f(x)$ possiede 4 stati di equilibrio. Le matrici di stato dei sistemi linearizzati (Jacobiani) calcolati in corrispondenza di tali equilibri sono le seguenti:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Discutere la stabilità dei 4 equilibri del sistema non lineare.
~~b) Nei casi in cui è possibile, tracciare il quadro locale delle traiettorie nell'intorno dell'equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$.~~

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

4)

Indicare la risposta esatta (che è sempre unica): non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

A un sistema lineare a tempo continuo, asintoticamente stabile, viene applicato l'ingresso $u(t) = 0.5\sin(2t)$. Una funzione di uscita $y(t)$ ammissibile, a transitorio esaurito, è la seguente:

[1] $0.5\sin(t)$
[2] $0.5\sin(2t^2)$
[3] 10
[4] nessuna delle funzioni indicate è ammissibile

Un sistema lineare a tempo continuo, di ordine $n = 2$, ha matrice A con traccia nulla e determinante nullo:

[1] il sistema è asintoticamente stabile
[2] il sistema è fortemente instabile
[3] il sistema può essere semplicemente stabile o debolmente instabile
[4] il sistema è semplicemente stabile

In un sistema di controllo con funzione di trasferimento d'anello $L(s)$, l'errore a regime dovuto a un disturbo additivo sull'uscita vale zero

[1] in nessun caso
[2] se e solo se $L(s)$ ha almeno un polo nullo
[3] se e solo se $L(s)$ ha uno e un solo polo nullo
[4] se e solo se $L(s)$ ha guadagno maggiore o uguale a 8

Dato un sistema (A, b, c, d) di ordine n, condizione sufficiente affinché la sua funzione di trasferimento abbia denominatore di grado n è che il sistema sia

[1] completamente raggiungibile e completamente osservabile
[2] completamente raggiungibile o completamente osservabile
[3] asintoticamente stabile
[4] esternamente stabile

5)
Si consideri un sistema lineare a tempo continuo (A, b, c) con funzione di trasferimento $G(s)$.

a) Si enunci la definizione di stabilità esterna e se ne fornisca una condizione necessaria e sufficiente.
b) Si proponga un sistema di ordine 2 che sia esternamente stabile ma (internamente) instabile, dimostrando il sussistere delle due proprietà.

6)
In Matlab sono state definite le matrici (A, b, c, d) relative ad un sistema a tempo discreto. Scrivere l'istruzione (o la sequenza di istruzioni) che permette di calcolare il guadagno del sistema.

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire <u>sul retro</u>]:

1)

a) $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + 4 \qquad \lambda = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - 16}}{2}$

$\begin{cases} \mathrm{tr}\, A = +p \\ \det A = 4 \end{cases}$: A asint stabile $\Leftrightarrow p < 0$

$p = 0$: $\lambda = \pm i 2 \Rightarrow A$ semplicemente stabile

$p > 0$: $\mathrm{tr} A > 0 \Rightarrow A$ instabile

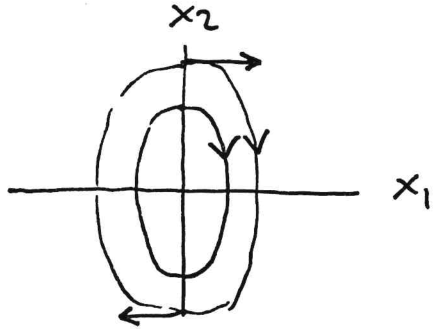
Tempo di risposta $(p<0)$:

$$\mathrm{Re}(\lambda_D) = \begin{cases} p/2, & \text{se } -4<p<0 \quad (\lambda_{1,2} \text{ complessi coniugati}) \\ \dfrac{p+\sqrt{p^2-16}}{2}, & \text{se } p<-4 \quad (\lambda_{1,2} \text{ reali}) \end{cases}$$

$$T_R \simeq 5 \cdot \frac{-1}{\mathrm{Re}(\lambda_D)}$$

b) equilibrio : $\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 + \bar{u} \\ 0 = -4\bar{x}_1 + p\bar{x}_2 + 4\bar{u} \end{cases}$

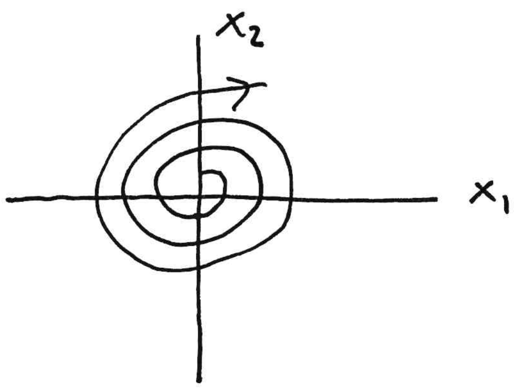
1) $p = 0$, $\bar{u} = 0$: $\bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\lambda_{1,2} = \pm i 2$ ("centro")



rotazione: $\dot{x}_1 = x_2$

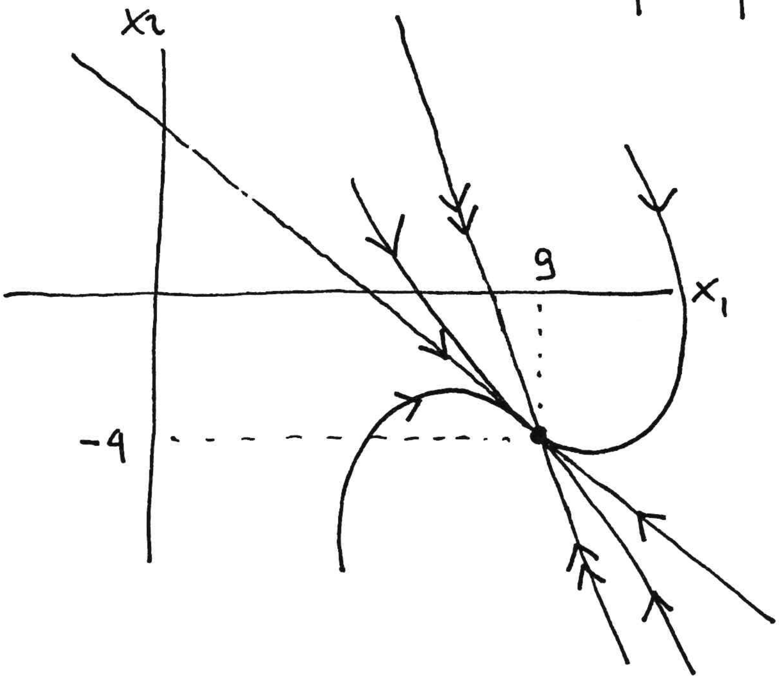
$\dot{x}_1 > 0$ se $x_2 > 0$

2) $p = 2$, $\bar{u} = 0$: $\bar{x} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{\cancel{12}}$ 3 ("fuoco instabile")



3) $p = -5$, $\bar{u} = 4$: $\bar{x} = \begin{vmatrix} 9 \\ -4 \end{vmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$

("nodo stabile")



$A w = \lambda w$:

$\lambda = -1$: $w_2 = -w_1$

$\lambda = -4$: $w_2 = -4 w_1$

c) $R = \begin{vmatrix} b & Ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4p-4 \end{vmatrix}$ $\det R = 4p - 4 - 16 = $
$= 4p - 20$

(A, b) compl. raggiungibile $\Longleftrightarrow p \neq 5$

d)
$$\left.\begin{aligned} s x_1 &= x_2 + u \\ s x_2 &= -4 x_1 + p x_2 + 4u \\ y &= x_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow G(s) = \frac{4(s-1)}{s^2 - ps + 4}$$

$$\{\text{poli}\} = \begin{cases} \sigma(A) = \left\{ \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - 16}}{2} \right\}, & \text{se } p \neq 5 \\ \{4\}, & \text{se } p = 5 \end{cases}$$ ("perdita di grado")

2) a) $y = A(u_1 - Cy) + B(u_2 - Cy)$

$$y(1 + AC + BC) = Au_1 + Bu_2$$

$$y = \underbrace{\frac{A}{1+AC+BC}}_{G_1(s)} u_1 + \underbrace{\frac{B}{1+AC+BC}}_{G_2(s)} u_2$$

b) $G_1(s) = \dfrac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}} = \dfrac{s+2}{s^2+4s+2} = \dfrac{s+2}{(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})}$

poli : $p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$, $Re(p_i) < 0 \ \forall i \Rightarrow$ ESTERN. STABILE

$$G_2(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}} = \frac{s}{s^2+4s+2} = \frac{s}{(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})}$$

poli come sopra, anche G_2 ESTERN. STABILE

c) $Y(s) = G_1(s)\dfrac{1}{s} + G_2(s)\dfrac{1}{s} =$

$$= \frac{s+2}{s(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})} + \frac{s}{s(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2s+2}{s(s+2+\sqrt{2})(s+2-\sqrt{2})} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s+2+\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{s+2-\sqrt{2}}$$

$\Longrightarrow \left(\alpha = 1 \ , \ \beta = \gamma = -\dfrac{1}{2}\right)$ $\qquad = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+2+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s+2-\sqrt{2}}$

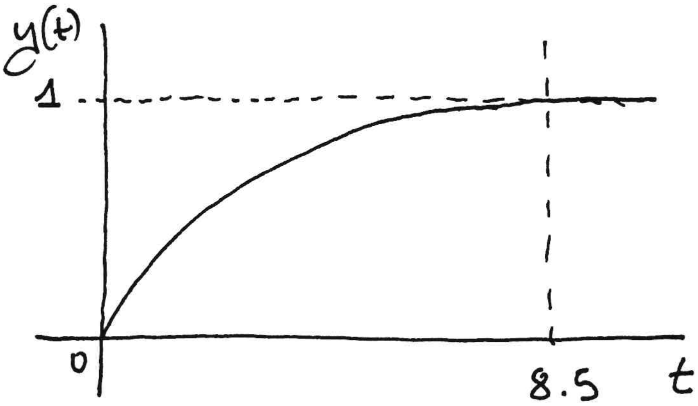
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{1}{2}e^{(-2-\sqrt{2})t} - \frac{1}{2}e^{(-2+\sqrt{2})t}$$

d) risp. scalino di $G_1(s)$: $y(\infty) = G_1(0) = 1$

$T_R \simeq 5\,T_D = 5 \cdot \dfrac{-1}{-2+\sqrt{2}} \simeq 8.5$

$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$

$m_s = 0$, $\delta = 0 \Rightarrow N = 0$



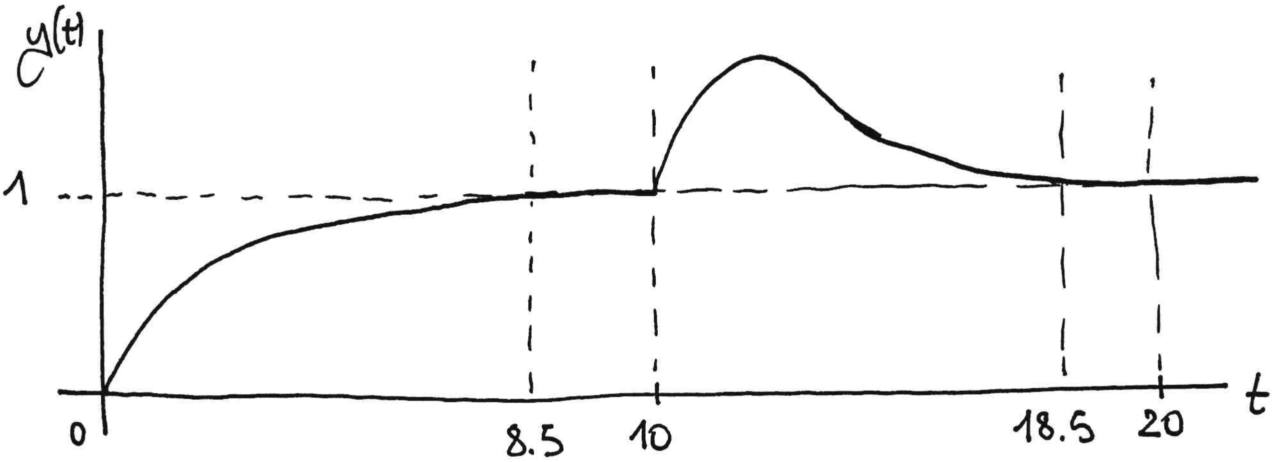
risp. scalino di $G_2(s)$: $y(\infty) = G_2(0) = 0$

T_R come sopra

$r = 1$: $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$

$m_s = 1$, $\delta = 0 \Rightarrow N = 1$

Risposta complessiva $(u_1(t) = sca(t)$, $u_2(t) = sca(t-10))$:



3)

a) ① $\left.\begin{array}{l} tr\, J_1 = -1 < 0 \\ \det J_1 = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow J_1$ asint. stabile $\Rightarrow \boxed{\bar{x}^1 \text{ asint. stabile}}$

$$\Delta_{J_1}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\bar{x}^1$ è un FUOCO STABILE

② $\left.\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 0 \right\} \ \exists \lambda_i > 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x}^2 \text{ è instabile}}$

③ $\left.\begin{array}{l} tr\, J_3 = 0 \\ \det J_3 = 4 > 0 \end{array}\right\} \ \Delta_{J_3}(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0$

$$\lambda = \pm 2i$$

J_3 sempl. stabile $\Rightarrow$ $\boxed{\text{NON è possibile concludere nulla sulla stabilità di } \bar{x}^3}$

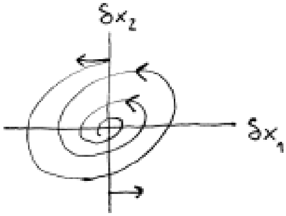
④ $\left.\begin{array}{l} tr\, J_4 = 0 \\ \det J_4 = -4 < 0 \end{array}\right\} \ \Delta_{J_4}(\lambda) = \lambda^2 - 4 = 0$

$$\lambda = \pm 2$$

$\exists \lambda_i > 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x}^4 \text{ è instabile}}$, ed è una SELLA.

b) Nei casi ② e ③ $\bar{x}$ non è iperbolico ($\exists \lambda_i$ con $Re(\lambda_i) = 0$), non è possibile dedurre dallo Jacobiano il quadro locale delle traiettorie.

①



Per stabilire il senso di rotazione:

$$\delta \dot{x} = J_1 \delta x$$

$$\delta \dot{x}_1 \Big|_{\delta x_1 = 0} = (1\, \delta x_1 - 2\, \delta x_2) \Big|_{\delta x_1 = 0} = -2 \delta x_2$$

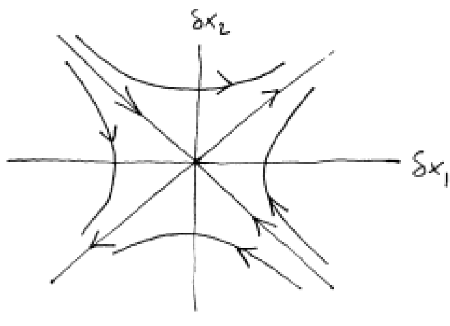
④ Calcolo gli autovettori:

$\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \delta x_1 = \delta x_2$

$\lambda = -2$: $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \delta x_2 = - \delta x_1$



5)

a) Il sistema è esternamente stabile se, dato $x(0)=0$, l'uscita $y(t)$ risulta limitata per qualunque ingresso $u(t)$ limitato.

- Il sistema è esternamente stabile se e solo se tutti i poli di $G(s)$ hanno $Re(p_i)<0$.

b) $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\sigma_A = \{-1, 1\}$

$\exists i : Re(\lambda_i) > 0$

$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ A INSTABILE

$G(s) = \dfrac{1}{1+s}$, $p=-1 \Rightarrow Re(p_i)<0 \ \forall i \Rightarrow$ $G(s)$ esternamente stabile

6)

```
mu = c * inv(eye(size(A))- A ) *b + d
```

4)

[4]

[3]

[2]

[1]