POLITECNICO
MILANO 1863

SOLUZIONI

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi e A. Gragnani
Appello del 16/6/2021

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:_____

							Voto totale
7	7	7	4	5	2		32

ATTENZIONE !
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1)
Si vuole descrivere la dinamica di una popolazione mediante un modello con tre classi d'età, in cui la terza classe includa non solo gli individui di 3 anni ma tutti quelli di 3 o più anni. I tassi di sopravvivenza nei primi tre anni di vita valgono rispettivamente $0 < s_0, s_1, s_2 < 1$, mentre il tasso di sopravvivenza in ogni anno successivo è $0 < s_3 < 1$. La popolazione è fertile solo nel secondo anno di vita, in cui ogni individuo genera in media $f_2 > 0$ figli.

a) Scrivere il modello a tempo discreto della popolazione, supponendo che vi sia un flusso di immigrazione di individui di sola classe 2 (ingresso $u(t)$) e che venga misurato il numero di nuovi nati (uscita $y(t)$).
b) Studiare la stabilità del sistema in funzione dei parametri s_i, f_2, discutendo anche il tempo di risposta e la presenza di oscillazioni nel movimento libero.
c) Studiare la raggiungibilità del sistema.
d) Studiare l'osservabilità del sistema, individuando la parte osservabile e non osservabile.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_1(t+1) = s_0 f_2 x_2(t)$

$x_2(t+1) = s_1 x_1(t) + u(t)$

$x_3(t+1) = s_2 x_2(t) + s_3 x_3(t)$

$y(t) = f_2 x_2(t)$

$$A = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & s_0 f_2 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & s_2 & s_3 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right| = b$$

$$c = \left| 0 \quad f_2 \quad 0 \right|$$

b) A è Triangolare a blocchi

$\lambda_1 = s_3 \rightsquigarrow |\lambda_1| < 1$ essendo $0 < s_3 < 1$

$\lambda_{2,3}$ sono le radici di $\lambda^2 - s_0 s_1 f_2 = 0$

$$\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{s_0 s_1 f_2}$$

A.S. $\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1 \ \forall i \rightsquigarrow s_0 s_1 f_2 < 1$

Invece, se $s_0 s_1 f_2 = 1 \Rightarrow$ S.S.

$s_0 s_1 f_2 > 1 \Rightarrow$ INST.

Tempo di risposta

- $s_3 > \sqrt{s_0 s_1 f_2} \rightarrow \lambda_D = \lambda_1 = s_3$ e $T_R = -\dfrac{5}{\ln s_3}$

- $s_3 < \sqrt{s_0 s_1 f_2} \rightarrow \lambda_D = \lambda_2 = \sqrt{s_0 s_1 f_2}$ e $T_R = -\dfrac{5}{\ln\sqrt{s_0 s_1 f_2}}$

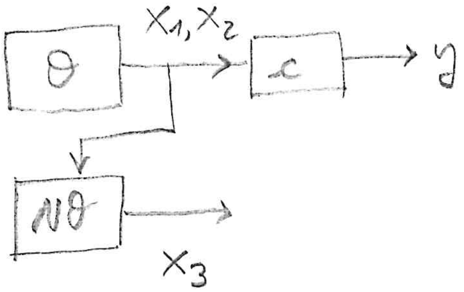
c) $R = \begin{vmatrix} b & Ab & A^2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & s_0 f_2 & 0 \\ 1 & 0 & s_0 s_1 f_2 \\ 0 & s_2 & s_2 s_3 \end{vmatrix}$

$\det(R) = -s_0 s_2 s_3 f_2 \neq 0 \Rightarrow (A,b)$ è C.R.

d) $\mathcal{O} = \begin{vmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & f_2 & 0 \\ s_1 f_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 s_1 f_2 & 0 \end{vmatrix}$

$\det(\mathcal{O}) = 0 \Rightarrow (A, c)$ è NON C.O.

Il sistema è già scomposto nelle sue parti O e NO



$A_O = \begin{vmatrix} 0 & s_0 f_2 \\ s_1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = b_O$

$c_O = \begin{vmatrix} 0 & f_2 \end{vmatrix}$

$\mathcal{O}_O = \begin{vmatrix} c_O \\ c_O A_O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & f_2 \\ s_1 f_2 & 0 \end{vmatrix}$

$\det \mathcal{O}_O \neq 0 \rightarrow$ C.O.

2)
Si consideri il seguente sistema a tempo continuo

$$\dot{x}_1 = 2(-x_1 - x_2 + x_2^3)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2$$

a) Determinare gli stati di equilibrio.
b) Studiarne la stabilità, [redacted]

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow -x_1 - x_2 + x_2^3 = 0 \rightarrow -x_1 - 2x_1 + 8x_1^3 = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = 2x_1$

$$\downarrow$$

$$x_1(-3 + 8x_1^2) = 0$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $\qquad$ $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $x_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow A(0,0) \quad B\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \quad C\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

b,c) $J = \begin{vmatrix} -2 & -2+6x_2^2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$J_A = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad$ $tr = -1$, $det = -6 \rightarrow$ INST. (SELLA)

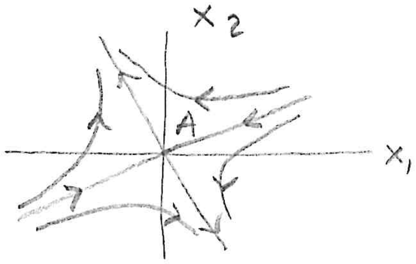
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$Jw = \lambda w \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}$$

$$-2w_1 - 2w_2 = \lambda w_1 \to w_2 = \frac{(-2-\lambda)\,w_1}{2}$$

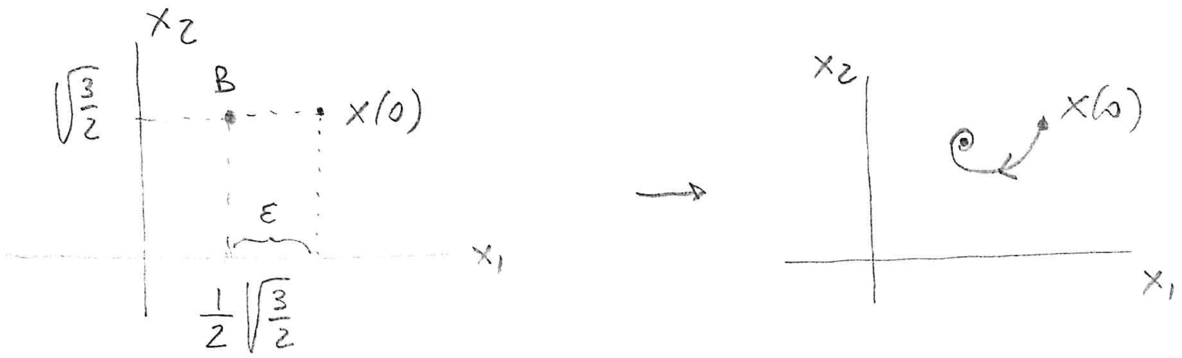
$$\lambda_1 = -3 \to w_2 = \frac{1}{2} w_1$$

$$\lambda_2 = 2 \to w_2 = -2 w_1$$

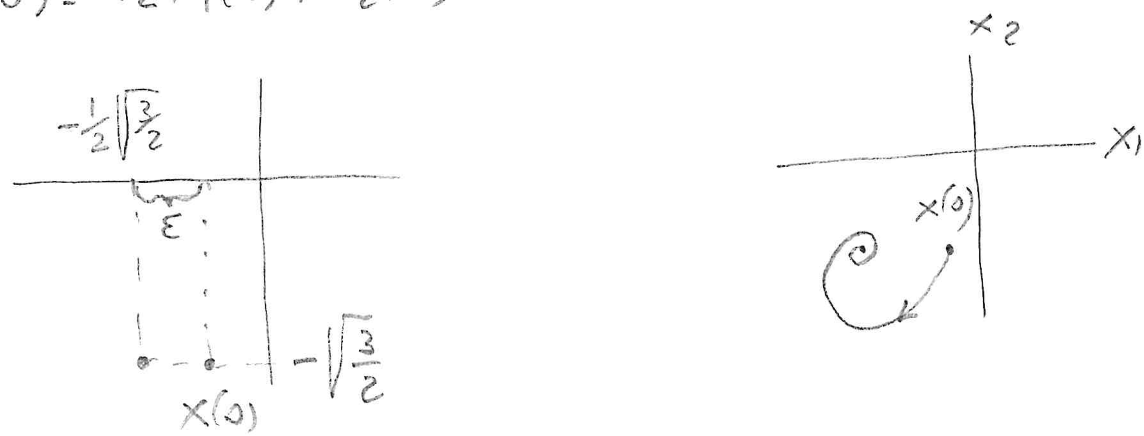


$$J_B = J_C = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} tr = -1 < 0 \\ det = 12 > 0 \end{array} \qquad \text{loc. A.S.}$$

$$\lambda^2 + \lambda + 12 = 0 \to \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{47}}{2} \qquad \text{FUOCO STABILE}$$



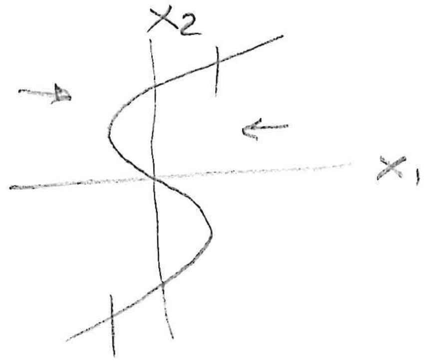
$$\dot{x}_2(0) = -2x_1(0) + x_2(0) = -2\varepsilon < 0$$



$$\dot{x}_2(0) = -2x_1(0) + x_2(0) = -2\varepsilon < 0$$

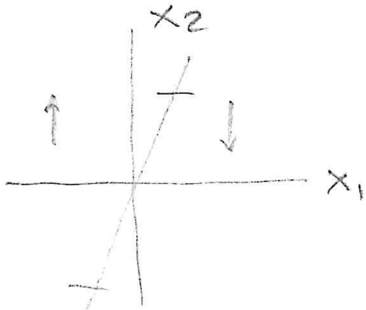
d) $\dot{x}_1 = 2(-x_1 - x_2 + x_2^3)$

$\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2 + x_2^3$

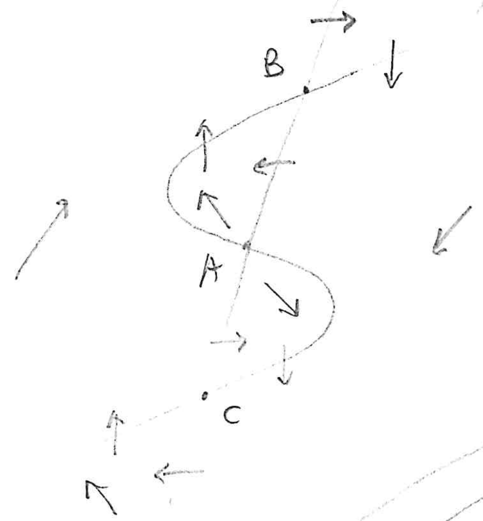


$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2$

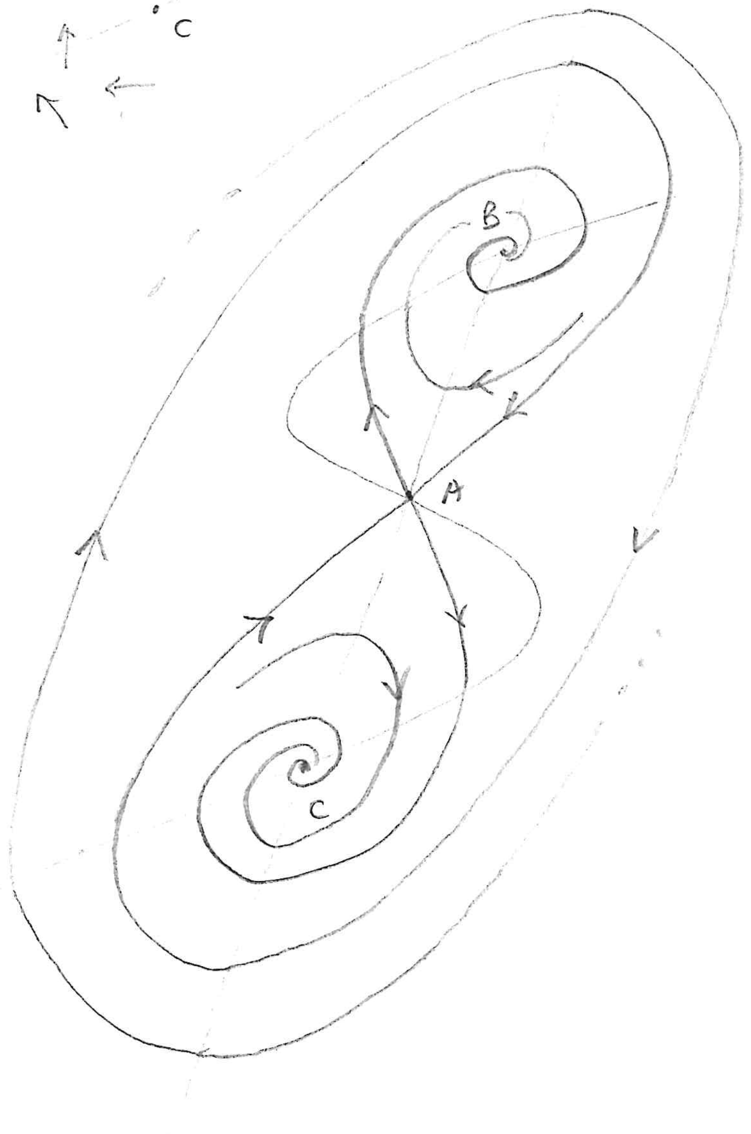
$\dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = 2x_1$



$\Rightarrow$



e)



3)
Una rete elettrica è stata sottoposta a prove di laboratorio allo scopo di ricavarne la funzione di trasferimento $G(s)$.

i) Applicando un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$ per ogni t, l'uscita a transitorio esaurito vale zero per qualunque $\bar{u}$.
ii) Applicando un ingresso sinusoidale $u(t) = \sin(\omega t)$ di ampiezza unitaria, alle frequenze:

$$\omega = 10^{-1}, 10, 10^2,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^9$$

si è rilevata un'ampiezza di uscita a transitorio esaurito, rispettivamente:

$$Y = 1, 10, 10, 100, 100, 1$$

Infine, si è misurato uno sfasamento dell'uscita rispetto all'ingresso che tende a $-(3/2)\pi$ per $\omega \to \infty$.

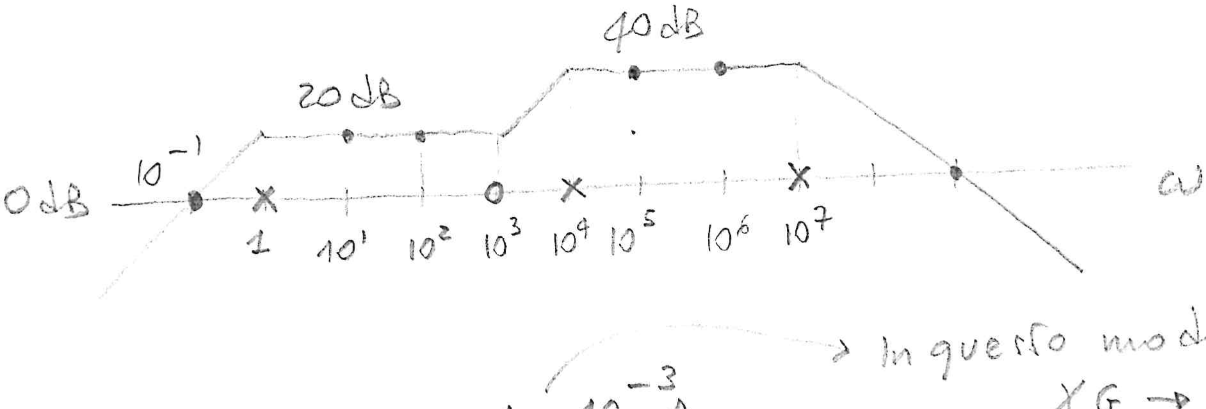
a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con tutti i risultati sperimentali.
b) Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta allo scalino e la risposta all'impulso.
c) Verificare la asintotica stabilità del sistema formato da $G(s)$ sottoposto a retroazione unitaria.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

i) $G(s)$ asintoticamente stabile con $G(0) = 0$ → almeno uno zero nell'origine

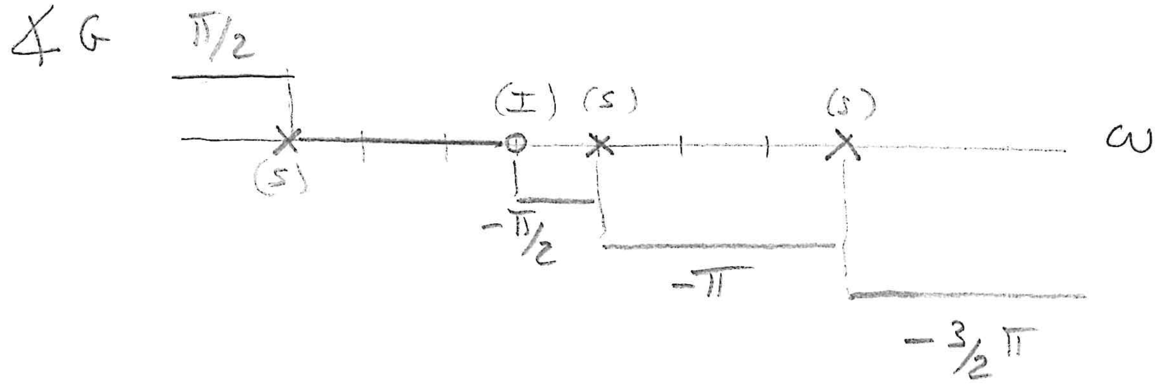
ii)

ω	10^{-1}	10^{1}	10^{2}	10^{5}	10^{6}	10^{9}
$\lvert G(i\omega)\rvert_{dB}$	0	20	20	40	40	0



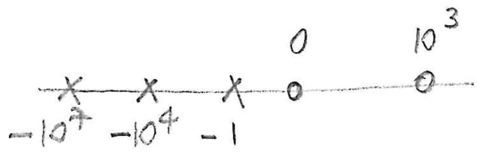
→ In questo modo $\measuredangle G \to -\frac{3}{2}\pi$
$\omega \to \infty$

a) $$G(s) = 10s\,\frac{1-10^{-3}s}{(1+s)(1+10^{-4}s)(1+10^{-7}s)}$$



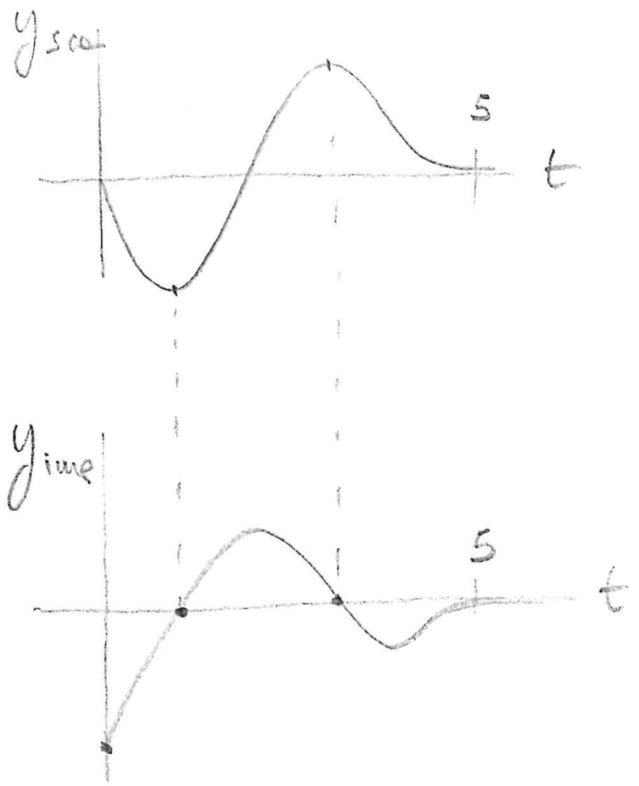
b) Risposta a scalino

$y_\infty = G(0) = 0$ $\qquad T_R = 5T_D = 5 \quad (p_D = -1)$

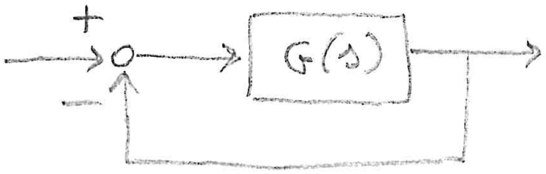


$m_s = 2$, $\sigma = 0$ $\Rightarrow$ $N = 2$

$r = 1 \qquad y(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = \frac{-10^{-2}}{10^{-11}} < 0$



Risposta a impulso (derivata della risposta a scalino)

c) 

G è la f.d.t di anello

Poichè $|G|_{dB} \not\nearrow ! \; 0\,dB \Rightarrow$ il criterio di Bode non può essere applicato.

Procedo quindi analiticamente

$$H = \frac{G}{1+G} = \frac{10s\,\frac{(\quad)}{(\quad)(\quad)(\quad)}}{1+10s\,\frac{(\quad)}{(\quad)(\quad)(\quad)}} =$$

$$= \frac{10s(1-10^{-3}s)}{(1+s)(1+10^{-4}s)(1+10^{-7}s)+10s(1-10^{-3}s)}$$

Il denominatore è del tipo $s^3+\alpha_1 s^2+\alpha_2 s+\alpha_3$

Poichè $\alpha_1 = 10^{-4}+10^{-7}+10^{-11}-10^{-2} < 0$

$\Rightarrow H(s)$ non è A.S.

$\begin{pmatrix}\text{HURWITZ}\\ n=3\end{pmatrix}$

4)

Indicare le risposte esatte: non è richiesta giustificazione.
(risposta esatta = +1, risposta errata = − 0.5, risposta non data = 0)

Un sistema lineare a tempo discreto ha autovalori in 0, -0.5 e -2.

Se ad esso viene applicato un ingresso nullo

- [1] lo stato tende a zero, per ogni condizione iniziale.
- [2] lo stato tende a zero, per ogni condizione iniziale non nulla.
- [3] lo stato tende a un valore costante non nullo, per ogni condizione iniziale non nulla.
- [4] lo stato non tende ad alcun limite per qualche condizione iniziale.

Se, partendo da condizione iniziale nulla, ad esso viene applicato un ingresso costante non nullo,

- [1] la sua uscita è limitata.
- [2] la sua uscita è illimitata.
- [3] la sua uscita tende a zero.
- [4] non vi sono dati sufficienti per caratterizzare l'andamento dell'uscita.

Due sistemi A (tempo continuo) e B (tempo discreto) hanno gli stessi autovalori in +0.3 e -0.3. Il movimento libero del sistema

- [1] è monotono per entrambi, qualunque sia lo stato iniziale.
- [2] presenta oscillazioni per entrambi, qualunque sia lo stato iniziale.
- [3] presenta oscillazioni per A ma non per B, per opportuno stato iniziale.
- [4] presenta oscillazioni per B ma non per A, per opportuno stato iniziale.

Sia dato un sistema di controllo in anello chiuso con riferimento w e disturbo additivo sull'uscita (disturbo di processo) d. La funzione di trasferimento di anello non ha né zeri né poli nell'origine e ha guadagno μ. Nel caso di ingressi costanti, l'errore a regime è pari a

- [1] 0.
- [2] $\bar{w} - \bar{d}$.
- [3] $\frac{1}{1+\mu}\bar{w} - \frac{1}{1+\mu}\bar{d}$.
- [4] $\frac{\mu}{1+\mu}\bar{w} + \frac{1}{1+\mu}\bar{d}$.

5)

Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo $\dot{x} = f(x)$ e un suo equilibrio $\bar{x}$, al quale corrisponde la matrice Jacobiana $A(\bar{x})$.

a) Si dica cosa è possibile affermare, in base all'analisi di $A(\bar{x})$, a proposito della stabilità di $\bar{x}$.
b) Si proponga un sistema non lineare, a tempo continuo, di ordine 1, che abbia un equilibrio instabile, dimostrandone la instabilità secondo quanto discusso al punto a).

6)

Sia dato un sistema di controllo con retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = \frac{0.1(1-s)}{(1+0.1s)(0.1+s)^2}$$

a) Quali comandi occorre digitare in Matlab per valutarne la pulsazione critica e il margine di fase?
b) Quali comandi sono invece necessari per valutare l'ampiezza dell'uscita a transitorio esaurito corripondente a un segnale di ingresso sinusoidale di ampiezza unitaria e pulsazione pari a 10?

Risposte ai quesiti 5-6 [se necessario proseguire sul retro]:

5a) $A(\bar{x})$ ha tutti gli autovalori con $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

$\Rightarrow \bar{x}$ è localmente asintoticam. stabile

$A(\bar{x})$ ha almeno un autovalore con $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$

$\Rightarrow \bar{x}$ è instabile

5b) $\dot{x} = x - x^2$

$\bar{x} = 0$ è un equilibrio

$A = 1 - 2x \rightarrow A|_{\bar{x}} = 1$

$\lambda = 1 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile

6a) NUM = 10 * [-1 1]
DEN = conv([0.1 1], conv([1 0.1],[1 0.1]))
L = tf(NUM, DEN)
margin(L) ⇝ nel grafico sono riportati ω_c e φ_m

6b) G = feedback(L, 1)
[ampiezza, fase] = bode(G, 10)
↓
è l'ampiezza dell'uscita