

Domanda 1 – 8 punti

In un processo produttivo, ciascun pezzo deve attraversare tre stadi di lavorazione in cascata, in ciascuno dei quali resta 1 ora. Al termine di ciascuno stadio, un controllo di qualità verifica se il pezzo può passare allo stadio successivo (o terminare la lavorazione, nel caso dell'ultimo stadio) o deve invece essere scartato (non vi sono ricicli). Mediamente, in tutti gli stadi il 90% dei pezzi supera positivamente il controllo.

- a) Scrivere un modello matematico del processo produttivo, in cui $u(t)$ sia il numero di pezzi messi in lavorazione nell'ora t e $y(t)$ il numero di pezzi che terminano con successo il processo produttivo.
- b) Discutere la stabilità, il tempo di risposta, e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.
- c) Calcolare stato e uscita all'equilibrio, corrispondenti a ingresso costante pari a 100.

Si supponga ora che il numero di nuovi pezzi messi in lavorazione sia fissato in modo proporzionale al numero di pezzi prodotti ($u(t) = ky(t)$).

- d) Discutere, al variare di k , le proprietà (equilibrio e stabilità) del sistema in questa nuova situazione.

a) $x_i(t)$ = n. pezzi in lavorazione nello stadio i
nell'ora t

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= u(t) \\ x_2(t+1) &= 0.9 x_1(t) \\ x_3(t+1) &= 0.9 x_2(t) \\ y(t) &= 0.9 x_3(t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 0 \quad 0.9] \end{aligned}$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$|\lambda_i| < 1 \quad \forall i \Rightarrow A$ asintoticamente stabile

Sistema a memoria finita: $T_R \leq n = 3$,
no oscillazioni

c) $\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 0.9 x_1 \\ x_3 = 0.9 x_2 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 100 \\ 90 \\ 81 \end{bmatrix} \quad \bar{y} = 72.9$

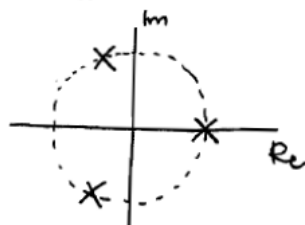
d) La 1^a eq. di stato diventa

$$x_1(t+1) = k y(t) = k 0.9 x_3(t)$$

Il sistema diventa autonomo (senza ingresso), con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.9k \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_A(\lambda) = \lambda^3 - (0.9)^3 k$$

$$|\lambda_i| = 0.9 \sqrt[3]{k}$$



Se $0.9 \sqrt[3]{k} < 1 \Rightarrow A$ asint. stabile, ~~non~~

$x(t) \rightarrow \bar{x} = 0$ da ogni $x(0)$

Se $0.9 \sqrt[3]{k} > 1 \Rightarrow A$ instabile, vi sono traiettorie
con $\|x(t)\| \rightarrow \infty$

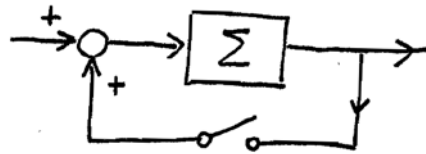
Se $0.9 \sqrt[3]{k} = 1 \Rightarrow A$ semplicemente stabile (λ_i sono
distinti), il movimento resta
limitato ma non tende a 0.

Domanda 2 – 8 punti

Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui il blocco Σ è descritto dalla terna di matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2p & -(2+p) \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0]$$

dove $-\infty < p < \infty$ è un parametro reale.



- a) Studiare la stabilità del sistema in figura al variare di p , sia con interruttore aperto che chiuso.
~~b) Tracciare il quadro delle traiettorie (con ingresso nullo) per $p = 0$, sia con interruttore aperto che chiuso.~~

$$a) \Sigma: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2px_1 - (2+p)x_2 + u_\Sigma \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s^2 + (2+p)s + 2p}$$

Quindi Σ è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+p > 0 \\ 2p > 0 \end{cases} \Rightarrow p > 0$

Chiudendo l'interruttore si crea un collegamento in retroazione; il sistema complessivo ha f.d.t.:

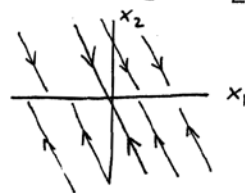
$$H(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 + \dots}}{1 - \frac{1}{s^2 + \dots}} = \frac{1}{s^2 + (2+p)s + 2p - 1}$$

che è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+p > 0 \\ 2p-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow p > \frac{1}{2}$

b) interruttore aperto, ~~chiuso~~, $p=0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0: Ax = \lambda_1 x \Rightarrow x_2 = 0$
 $\lambda_2 = -2: Ax = \lambda_2 x \Rightarrow x_2 = -2x_1$



interruttore chiuso, ~~aperto~~, $p=0$: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_1 \end{cases}$ $A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
 $\hookrightarrow u_\Sigma = x_1$, a causa della retroazione

$$\Delta_{A'}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 1, \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}: A'x = \lambda_1 x \Rightarrow x_2 = (-1 + \sqrt{2})x_1$$

$$\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}: A'x = \lambda_2 x \Rightarrow x_2 = (-1 - \sqrt{2})x_1$$



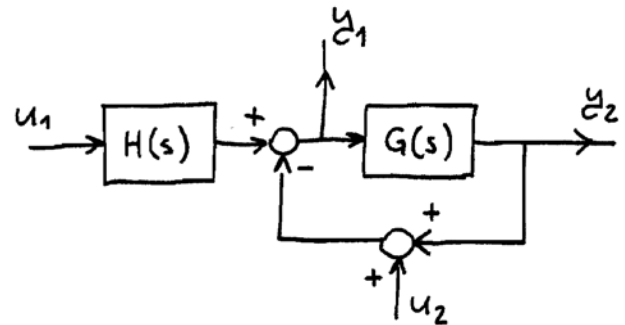
Domanda 3 – 8 punti

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo rappresentato in figura, in cui

$$G(s) = \frac{0.1}{s(1+s)^2} \quad H(s) = \exp(-s)$$

a) Determinare le 4 funzioni di trasferimento tra i 2 ingressi u_1, u_2 e le 2 uscite y_1, y_2 e discuterne la stabilità esterna.

b) Determinare l'espressione a transitorio esaurito delle 2 uscite y_1, y_2 quando vengono simultaneamente applicati gli ingressi $u_1 = \sin(t)$, $u_2 = \text{sca}(t)$ (per la componente sinusoidale, specificare esplicitamente la modalità di calcolo di modulo e fase).



$$a) \text{ con } u_2 = 0 : y_1 = \frac{H}{1+G} u_1 = \left(\frac{s(1+s)^2}{s^3 + 2s^2 + s + 0.1} e^{-s} \right) u_1 \triangleq A(s) \cdot u_1$$

$$y_2 = \frac{HG}{1+G} u_1 = \left(\frac{0.1}{s^3 + 2s^2 + s + 0.1} e^{-s} \right) u_1 \triangleq B(s) \cdot u_1$$

$$\text{con } u_1 = 0 : y_1 = -\frac{1}{1+G} u_2 = \left(\frac{-s(1+s)^2}{s^3 + 2s^2 + s + 0.1} \right) u_2 \triangleq C(s) \cdot u_2$$

$$y_2 = -\frac{G}{1+G} u_2 = \left(\frac{-0.1}{s^3 + 2s^2 + s + 0.1} \right) u_2 \triangleq D(s) \cdot u_2$$

$$\text{Hurwitz: } \mathcal{H} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{vmatrix} \begin{cases} 2 > 0 \\ 2 \cdot 1 - 0.1 \cdot 1 > 0 \\ 0.1 \cdot (D_2) > 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} 1 \text{ poli di} \\ s^3 + 2s^2 + s + 0.1 \\ \text{hanno tutti } \operatorname{Re}(p_i) < 0 \end{array} \right\}$$

Il blocco H è un ritardatore puro in cascata: non influenza la stabilità esterna

$\Rightarrow$ le 4 f. di t. sono ESTERNAMENTE STABILI.

b) contributo di $u_1(t) = \sin t$:

$$y_1'(t) = |A(i1)| \sin(t + \angle A(i1))$$

$$= \left| \frac{i(1+i)^2}{i^3 + 2i^2 + i + 0.1} \right| e^{-i} \sin(t + \angle(i) + 2\angle(1+i) - \angle(i^3 + 2i^2 + i + 0.1) + \angle(e^{-i}))$$

$|e^{-i\omega}| = 1 \forall \omega$ $\angle(e^{-i\omega}) = -\omega$

$$= 1.05 \sin(t - 1)$$

$$y_2''(t) = |B(i1)| \sin(t + \angle B(i1)) = 0.05 \sin(t + \pi - 1)$$

contributo di $u_2(t) = \cos t$:

$$y_1''(t) = C(0) \cdot 1 = 0$$

$$y_2''(t) = D(0) \cdot 1 = -1$$

$$\text{complessivamente: } y_1 = y_1' + y_1'' \quad , \quad y_2 = y_2' + y_2''$$

RISPONDERE RIPORTANDO SUL FOGLIO LA SEQUENZA CORRETTA, CON "0" PER RISPOSTA NON DATA. Esempio: 1 - 3 - 0 - 2

Domanda 4 – 4 punti

*Scegliere (senza giustificare) la risposta esatta. Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito.
(risposta esatta = +1, risposta errata = -0.5, risposta non data = 0)*

Il principio di sovrapposizione, applicato a un sistema dinamico lineare con un solo ingresso e una sola uscita, permette di concludere che è possibile dimezzare l'uscita

- [1] dimezzando l'ingresso purché lo stato iniziale sia raddoppiato.
- [2] dimezzando lo stato iniziale purché l'ingresso sia raddoppiato.
- ~~[3]~~ dimezzando lo stato iniziale purché l'ingresso sia nullo.
- [4] dimezzando il guadagno.

La matrice Jacobiana di un sistema non lineare di ordine 3, a tempo discreto, valutata in un equilibrio $\bar{x}$, ha autovalori $\lambda_1 = -0.1$, $\lambda_2 = +3i$, $\lambda_3 = -3i$.

- [1] L'equilibrio $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.
- [2] L'equilibrio $\bar{x}$ è semplicemente stabile.
- ~~[3]~~ L'equilibrio $\bar{x}$ è instabile.
- [4] Non si può affermare nulla sulla stabilità dell'equilibrio $\bar{x}$.

Sia dato un sistema lineare a tempo discreto instabile non completamente raggiungibile. Mediante una legge di controllo lineare con retroazione da tutto lo stato, è possibile portare il sistema esattamente all'equilibrio in un tempo finito pari al massimo all'ordine del sistema

- ~~[1]~~ se e solo se alla parte non raggiungibile del sistema sono associati autovalori tutti nulli.
- [2] se e solo se alla parte raggiungibile del sistema sono associati autovalori tutti nulli.
- [3] sempre.
- [4] mai.

Sia $L(s)$ la funzione di trasferimento d'anello di un sistema di controllo. $L(s)$ ha guadagno μ positivo, uno zero nell'origine e due poli reali negativi.

- [1] Il sistema di controllo è instabile per ogni μ .
- ~~[2]~~ Il sistema di controllo è asintoticamente stabile per ogni μ .
- [3] Il sistema di controllo è asintoticamente stabile se e solo se $\mu > 1$.
- [4] Non vi sono sufficienti informazioni per studiare la stabilità del sistema di controllo.

Domanda 5 – 2 punti

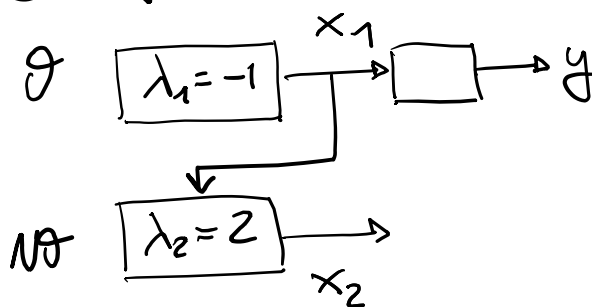
Si dia la definizione di sistema rivelabile, precisando sotto quali condizioni un sistema sia rivelabile.
Proporre un esempio di sistema non rivelabile.

Un sistema è rivelabile se ammette ricostruttore
asintotico dello stato cioè se $\exists L/A+P_c$
abbia autovalori a $\text{Re} < 0$ ($| \lambda | < 1$) a.t.c. (t.d.)

Sistema C.D. $\Rightarrow$ è rivelabile

Sistema NON C.D.: È rivelabile $\Leftrightarrow$ la sua parte NON è
asintoticamente stabile

Esempio (t.c.)



$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow y_{ub}^{(.))} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \overline{X}_{NG} = \{ x_1 = 0 \}$$

$$\lambda_2 = 2 \text{ non è A.S.}$$

$$\Rightarrow \text{non è rivelabile}$$

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2$$

$$y = x_1$$

Domanda 6 – 2 punti

Sia dato un sistema di controllo con retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$L(s) = \frac{0.1(1-s)}{(1+0.1s)(0.1+s)^2}$$

Quali comandi occorre digitare per valutarne la pulsazione critica e il margine di fase?

```
NUM = 0.1 * [-1 1]
DEN = conv([0.1 1], conv([1 0.1], [1 0.1]))
SISTEMA = tf(NUM, DEN)
[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(SISTEMA)
```

dove Pm = margine di fase
 Wcp = pulsazione critica