



POLITECNICO MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 11/2/2020

COGNOME: _____ NOME: _____

MATRICOLA o CODICE PERSONA: _____

FIRMA: _____ Visto del docente: _____

							Voto totale
6	6	6	6	3	3	2	32

ATTENZIONE !

- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Si consideri il sistema aggregato a tempo continuo rappresentato in figura.

Il blocco B ha funzione di trasferimento

$$G_B(s) = \frac{s}{s-2}$$

Il blocco C è descritto dal modello ingresso/uscita

$$\ddot{y}_C + 8\dot{y}_C + y_C = -4\dot{u}_C$$

Il blocco D è descritto dal modello interno

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

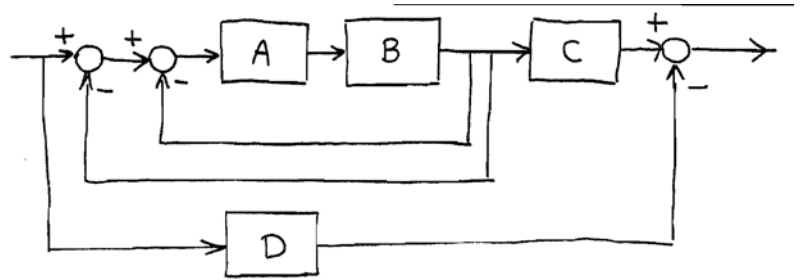
a) Supponendo che il blocco A sia descritto dalla funzione di trasferimento

$$G_A(s) = \frac{\alpha}{s + \beta}$$

discutere (motivatamente) per quali valori di (α, β) il sistema in figura risulta asintoticamente stabile.

b) Scelta una qualunque coppia (α, β) che rende il sistema asintoticamente stabile, determinare tutte le costanti di tempo del sistema e il tempo di risposta.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



a) F: (A cascata B) con retroazione unitaria

$$F(s) = \frac{\frac{\alpha}{s+\beta} \cdot \frac{s}{s-2}}{1 + \frac{\alpha}{s+\beta} \cdot \frac{s}{s-2}} = \frac{\alpha s}{s^2 + (\alpha + \beta - 2)s - 2\beta}$$

H: F con retroazione unitaria

$$H(s) = \frac{\frac{\alpha s}{s^2 + (\alpha + \beta - 2)s - 2\beta}}{1 + \frac{\alpha s}{s^2 + (\alpha + \beta - 2)s - 2\beta}} = \frac{\alpha s}{s^2 + (2\alpha + \beta - 2)s - 2\beta}$$

$$H \text{ asintoticamente stabile} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 2 > 0 \\ -2\beta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < 0 \\ \alpha > 1 - \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

H, C, D sono collegati in cascata/parallelo:

Σ asintoticamente stabile $\Leftrightarrow$ H, C, D asint. stabili

$$C: (s^2 + 8s + 1)y_c = -4s \cdot u_c$$

$\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow$ asint. stabile

$$D: A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \sigma(A) = \{-1, -2, -1, -2\} \Rightarrow \text{asint. stabile}$$

$$\text{QUINDI: } \Sigma \text{ asint. st.} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < 0 \\ \alpha > 1 - \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

b) Scelgo $\alpha = 4, \beta = -2$: $H(s) = \frac{4s}{s^2 + 4s + 4} = \frac{4s}{(s+2)^2}$

$$\{T\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

$$C: s = -4 \pm \sqrt{16 - 1} = -4 \pm \sqrt{15}$$

$$\{T\} = \left\{\frac{1}{-4 \pm \sqrt{15}}\right\} = \{0.127, +7.87\}$$

$$D: \{T\} = \left\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$$

Quindi per l'intero sistema: $\{T\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0.127, \underbrace{7.87}_{T_D, T_R \approx 39.4}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$

2) Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = [0 \quad 1]$$

- a) Studiarne la stabilità, la raggiungibilità e l'osservabilità.
 b) Determinare un regolatore (legge di controllo + ricostruttore dello stato) tale che il sistema regolato, sottoposto a ingresso costante, raggiunga l'equilibrio in tempo finito.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) stabilità: $\Delta_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{matrix} 2.62 \\ 0.38 \end{matrix} \quad \exists \lambda_i : |\lambda_i| > 1 \Rightarrow A \text{ INSTABILE}$$

raggiungibilità: $R = [b \quad Ab] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \det R = -1 \neq 0 \Rightarrow (A, b) \text{ COMPLETAM. RAGGIUNGIBILE}$

osservabilità: $O = \begin{vmatrix} c \\ cA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \det O = 1 \neq 0 \Rightarrow (A, c) \text{ COMPLETAM. OSSERVABILE}$

b) Bisogna imporre $\Delta_{A+bK}(\lambda) = \Delta_{A+Lc}(\lambda) = \lambda^2$.

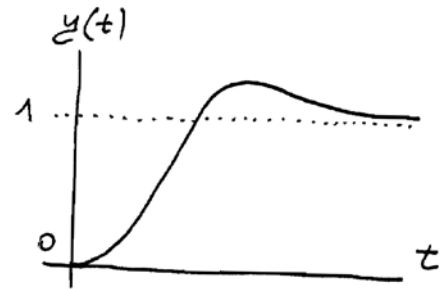
$$A+bK = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} [K_1 \quad K_2] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ K_1-1 & K_2+3 \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \text{tr}(A+bK) = K_2+3 = 0 \\ \det(A+bK) = 1-K_1 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} K_1 = 1 \\ K_2 = -3 \end{matrix}$$

$$A+Lc = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & l_1+1 \\ -1 & l_2+3 \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \text{tr}(A+Lc) = l_2+3 = 0 \\ \det(A+Lc) = l_1+1 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} l_1 = -1 \\ l_2 = -3 \end{matrix}$$

3) La risposta allo scalino rilevata sperimentalmente su un sistema è quella riportata in figura. Si sono inoltre eseguite tre rilevazioni sperimentali applicando ingresso sinusoidale del tipo $u(t) = U \sin(\omega t)$ alle frequenze $\omega = 0.01; 10; 10^4$, ottenendo rispettivamente i valori 1; 10; 0.01 del rapporto di ampiezza uscita/ingresso a regime.

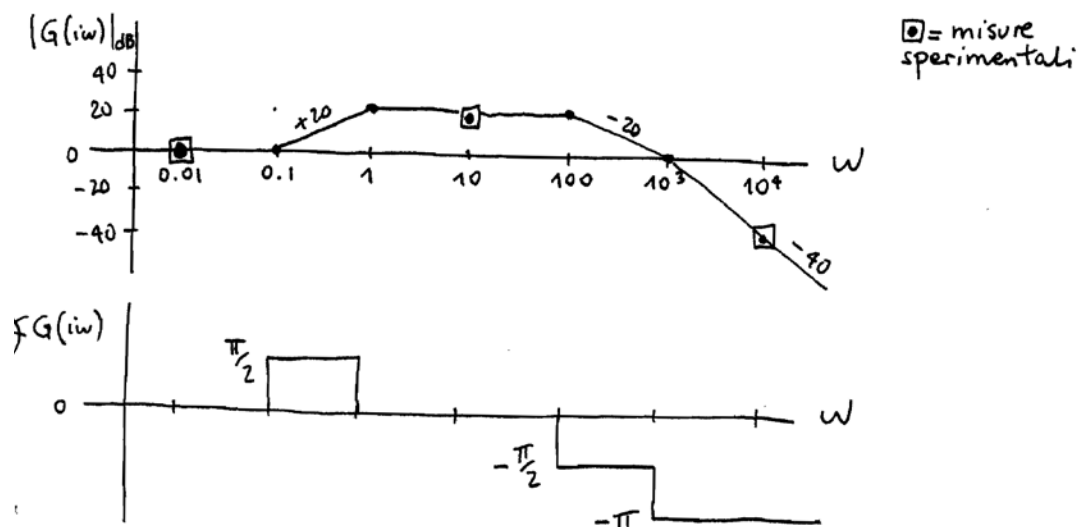


- Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ compatibile con le prove sperimentali, tracciandone inoltre i diagrammi di Bode di modulo e fase.
- Determinare in modo qualitativo, e rappresentare graficamente, la risposta all'impulso del sistema.
- Discutere la stabilità del sistema ottenuto con retroazione (negativa) unitaria di $G(s)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{y}(0) = 0$, quindi $r \geq 2$. Esiste uno zero superiore (1 estremo), quindi $n \geq 3$. Una possibile $G(s)$ sarà del tipo:

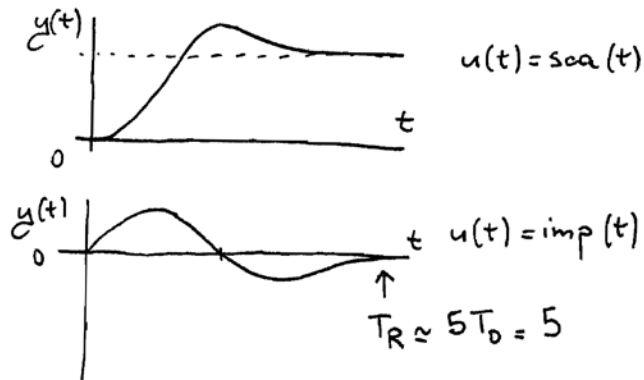
$$G(s) = \mu \frac{(1+s\tau)}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}, \text{ con } \mu = 1.$$



Una $G(s)$ compatibile con tutte le prove sperimentali è:

$$G(s) = \frac{(1+10s)}{(1+s)(1+0.01s)(1+0.001s)}$$

b) Derivo graficamente la risposta allo scalino:



c) Posso usare il criterio di Hurwitz per studiare la stabilità di $H(s) = G(s)/(1+G(s))$, oppure il criterio di Bode, poiché:

a) i poli di $G(s)$ hanno tutti $\text{Re}(p) > 0$

b) $|G(i\omega)| = 1$ solo in $\omega = 10^3 = \omega_c$ (NB: per $\omega \rightarrow 0$ $|G(i\omega)| \rightarrow 1$ ma lo raggiunge solo asintoticamente)

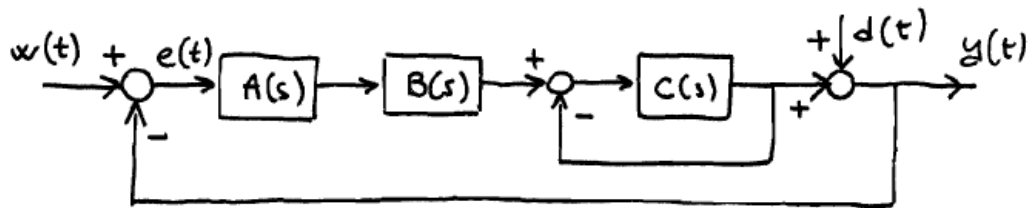
Allora:

1) $\mu > 0$

2) $\varphi_m = \pi - |\varphi_c| \approx \pi - |-135^\circ| \approx 45^\circ > 0$

$\Rightarrow H(s)$ è asintoticamente stabile.

4) Si consideri il sistema in figura, in cui $B(s) = (1 - s)/(s + 1)$ e $C(s) = 1/s$.



- Determinare una possibile funzione di trasferimento per il blocco $A(s)$, contenente esattamente 1 polo e 1 zero, affinché il sistema risulti asintoticamente stabile con un margine di fase di circa 90° , e l'errore $e(t)$ a regime a fronte di ingressi costanti sia nullo.
- Stimare, anche in modo approssimato, la banda del sistema e il suo tempo di risposta.
- Determinare, anche in modo approssimato, l'ampiezza dell'errore a regime dovuto a un disturbo $d(t) = 0.1 \sin(10t)$.

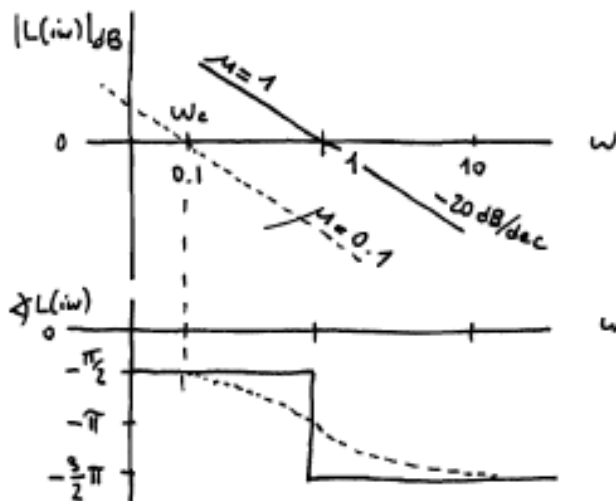
Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Per avere $e_w(\infty) = e_d(\infty) = 0$ la $L(s)$ deve contenere un integratore, quindi:

$$A(s) = \frac{\mu}{s}(1+s\tau) \Rightarrow L(s) = \frac{\mu}{s}(1+s\tau) \frac{1-s}{1+s} \quad \left(\frac{1}{1+s} \right) \text{ retroaz.}$$

Pongo $\tau=1$, quindi $L(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1-s}{1+s}$.

Applico il criterio di Bode ($L(s)$ non ha poli con $\text{Re}(p_i) > 0$):



Ponendo $\mu=0.1$ si ottiene:

$$\omega_c = 0.1 \quad \varphi_c \approx -\pi/2$$

$$\varphi_m \approx \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

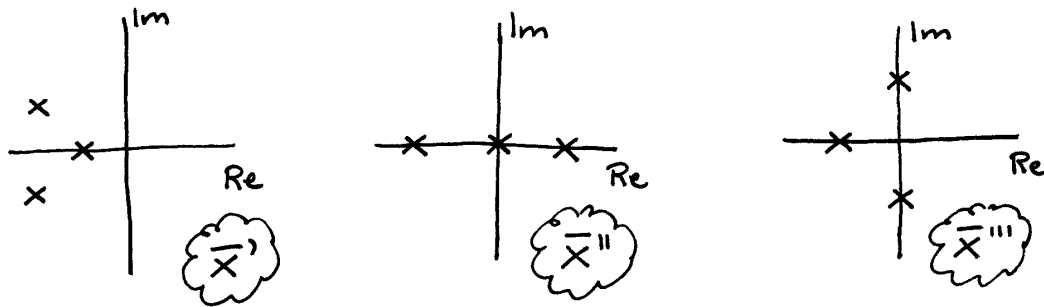
$$\begin{aligned} \text{b) BP} &= \{ \omega : 0 < \omega < \omega_c \} \\ &= \{ \omega : 0 < \omega < 0.1 \} \end{aligned}$$

$$T_R \approx \frac{5}{\omega_c} = 50$$

c) La frequenza $\omega = 10$ è abbondantemente al di fuori della banda passante del sistema retroazionato $H = L/(1+L)$. Quindi $|H(i10)| \approx 0 \text{ dB} = 1$ e $e(t) = 0.1 \sin(10t + \varphi)$.

5) Specificare la relazione, esistente in un sistema lineare con ingresso costante, tra stabilità, esistenza e unicità dell'equilibrio, e comportamento asintotico.

6) Il sistema (non lineare) $\dot{x} = f(x)$ di ordine $n=3$ ha tre equilibri: $\bar{x}'$, $\bar{x}''$, $\bar{x}'''$. La matrice di stato del sistema linearizzato (jacobiana) ha, in corrispondenza dei tre equilibri, gli autovalori rappresentati in figura. Cosa si può dedurre sulla stabilità dei tre equilibri? (motivare la risposta)



7) Illustrare la sequenza di comandi da digitare, una volta avviato Matlab, per visualizzare la risposta allo scalino del sistema

$$G(s) = \frac{10(1-10s)}{(1+s)(1+2s)^2}$$

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire sul retro]:

5) In un sistema lineare $\dot{x} = Ax + b\bar{u}$ (o $x(t+1) = Ax(t) + b\bar{u}$), l'equilibrio $\bar{x}$ esiste ed è unico, e $x(t) \rightarrow \bar{x}$ da ogni $x(0)$, se e solo se A è asintoticamente stabile.

6)

Tutti i λ_i hanno $\text{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow \bar{x}'$ è ASINT. STAB. $\left\{ \begin{array}{l} \exists \text{ un } \lambda_i \text{ con } \text{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \bar{x}'' \text{ è INSTABILE} \\ \exists \lambda_i \text{ con } \text{Re}(\lambda_i) = 0, \text{ ma } \nexists \lambda_i \text{ con } \text{Re}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \text{NON È POSSIBILE CONCLUDERE NULLA} \end{array} \right.$

7)

$$G(s) = \frac{10(1-10s)}{(1+s)(1+2s)^2} = \frac{-100s+10}{4s^3+8s^2+5s+1}$$

quindi:

`>> sis = tf([-100 10], [4 8 5 1])`

`>> step(sis)`