POLITECNICO
MILANO 1863

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 20/1/2020

COGNOME:______________________ NOME: ______________________

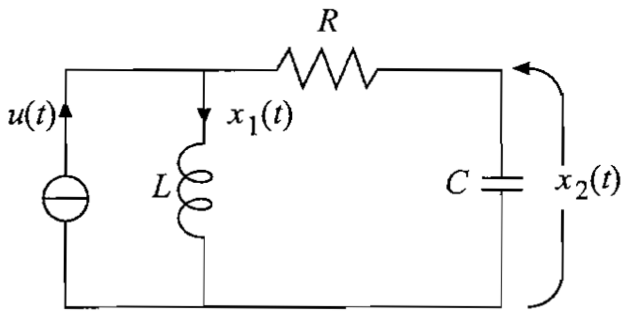
MATRICOLA o CODICE PERSONA: ________________________

FIRMA: ____________________________________ Visto del docente:______

| 6 | 6 | 6 | 6 | 3 | 3 | 2 | | Voto totale 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**ATTENZIONE !**
- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Si consideri la rete elettrica in figura, in cui $R > 0$ e $C = L = 1$.




a) Scrivere le equazioni di stato e di uscita, considerando come variabile di uscita la corrente nell'induttore.

b) Discutere la stabilità del sistema al variare di $R$.

~~c) Alla rete elettrica a riposo (stato iniziale nullo) viene applicato l'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = 1$ nell'intervallo $0 < t < 10$ e quindi l'ingresso costante $u(t) = \bar{u} = -1$ nell'intervallo $10 < t < 20$. Rappresentare graficamente, nello spazio di stato, la corrispondente traiettoria del sistema nell'intervallo $0 < t < 20$, nei due casi $R = 1$ e $R = 4$.~~

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{L}\left(R(u - x_1) + x_2\right) \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}(u - x_1) \end{cases} \xrightarrow{C=L=1} A = \begin{vmatrix} -R & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} R \\ 1 \end{vmatrix} = b$$

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$y = x_1$$

b) $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + R\lambda + 1 = 0$ $\qquad \alpha_1, \alpha_2 > 0 \ \forall R$

$\Longleftrightarrow$ A asintoticamente stabile $\forall R$

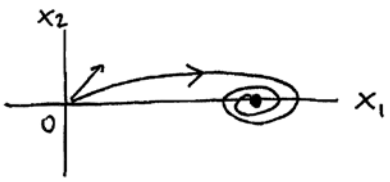
autovalori:

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4}}{2}$$

c) equilibrio: $(\bar{u} = 1)$ $$\begin{cases} 0 = -R\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + R \\ 0 = -\bar{x}_1 + 1 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\boxed{R = 1}$ : $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, complessi coniugati

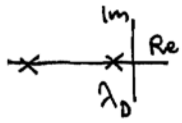
$\rightarrow$ FUOCO STABILE




$$\dot{x}\Big|_{x=0} = b\bar{u} = \begin{vmatrix} R \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{R = 4}$ : $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$, reali negativi

$\rightarrow$ NODO STABILE





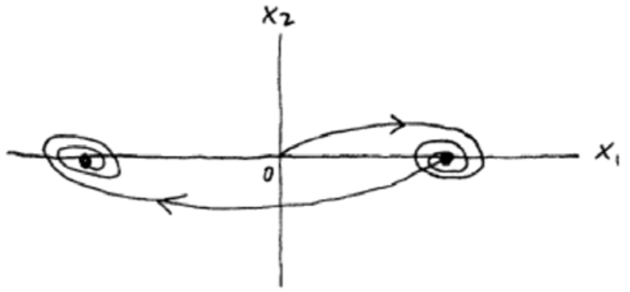
$$Aw = \lambda w \Rightarrow -w_1 = \lambda w_2$$

L'equilibrio è raggiunto dopo circa $T_R \simeq 5T_D$, quindi $T_R \simeq 10$ per $R=1$, $T_R \simeq 5/2$ per $R=4$ : in entrambi i casi, l'equilibrio è raggiunto a $t=10$, quando $\bar{u}$ cambia valore.

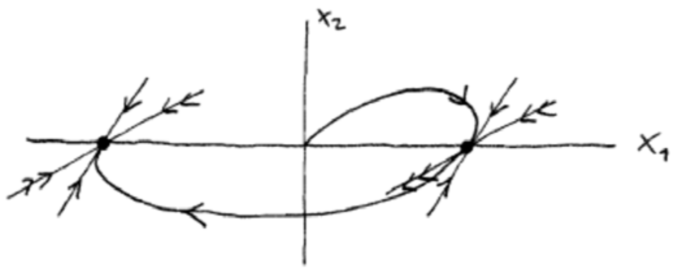
Poiché, in generale, $\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$, se $\bar{u}$ inverte il segno lo stesso fa $\bar{x}$. Quindi $\bar{x} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ per $\bar{u} = -1$.

Le traiettorie complessive $(0<t<20)$ sono le seguenti:

$\boxed{R=1}$




$\boxed{R=4}$



2) La competizione tra due fornitori di servizi può essere descritta da un modello del tipo:

$$\dot{x}_1 = x_1\left(1 - \frac{x_1}{2}\right) - \frac{x_1 x_2}{2}$$
$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2) - x_1 x_2$$

in cui $x_1$ e $x_2$ rappresentano l'ammontare dei contratti di fornitura stipulati dai due competitori.

a) Determinare tutti gli stati di equilibrio del sistema.
b) Studiarne la stabilità con il metodo di linearizzazione.
~~c) Utilizzando il quadro locale delle traiettorie nell'intorno degli stati di equilibrio, e sfruttando le informazioni fornite dallo studio delle isocline, proporre un plausibile quadro delle traiettorie nel primo quadrante.~~
~~d) In base ai risultati del punto c), determinare il bacino di attrazione (limitatamente agli stati iniziali non negativi) degli equilibri asintoticamente stabili, se ve ne sono.~~

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{x}_1 = x_1\left(1 - \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}\right)$

$\dot{x}_2 = x_2\left(1 - x_2 - x_1\right)$

Equilibri : $A = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\quad C = \cancel{\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$

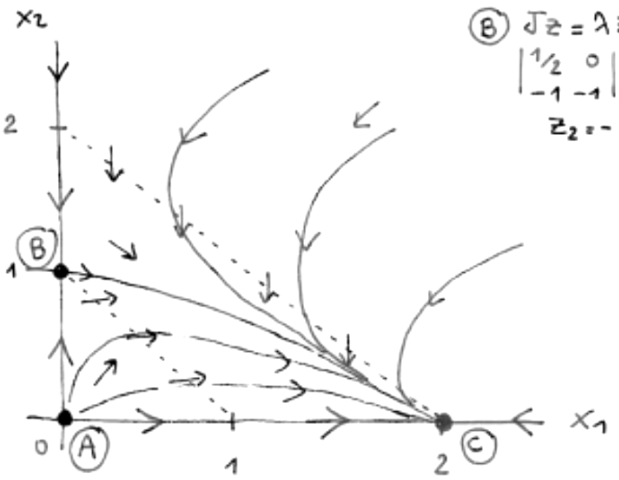
b) $J(x) = \begin{vmatrix} 1 - x_1 - \frac{x_2}{2} & -\frac{x_1}{2} \\ -x_2 & 1 - 2x_2 - x_1 \end{vmatrix}$

$J(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad$ A è instabile (nodo)

$J(B) = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = -1$ $\quad$ B è instabile (sella)

$J(C) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $\quad$ C è asint. stabile (nodo)

c)




B $\quad Jz = \lambda z \quad , \lambda = 1/2$

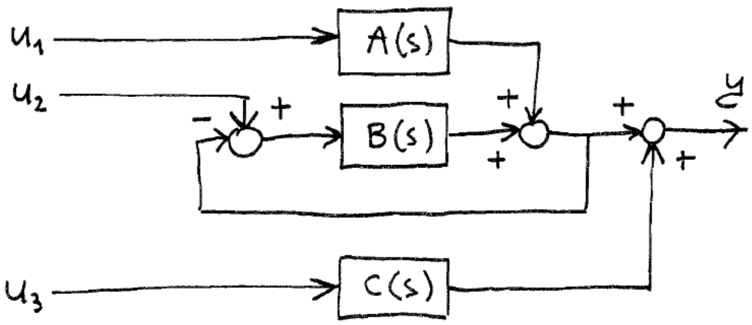
$\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \end{vmatrix}$

$z_2 = -2/3\, z_1$, varietà inst.

d) $B(\bar{x}_c) = \left\{ x \mid x_1 > 0,\ x_2 \geq 0 \right\}$

3) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui i tre blocchi hanno funzione di trasferimento:

$$A(s) = \frac{1}{1+3s} \qquad B(s) = \frac{10}{s(1+s)} \qquad C(s) = 2\frac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$$




a) Determinare la funzione di trasferimento tra ciascuno degli ingressi e l'uscita $y$, discutendone la stabilità.
b) Determinare qualitativamente, e rappresentare graficamente, l'andamento di $y(t)$ quando agli ingressi $u_1, u_2, u_3$ viene applicato uno scalino unitario agli istanti, rispettivamente, $t = 0,\ 20,\ 40$.

---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $u_1 \to y$ : $(u_2 = u_3 = 0)$

$y = Au_1 - By$

$y = \frac{A}{1+B} u_1$

$$F(s) = \frac{A}{1+B} = \frac{1}{1+3s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{10}{s(1+s)}} = \frac{s(1+s)}{(1+3s)(s^2+s+10)}$$

poli: $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$ : asintoticamente stabile,

$T_R \simeq 5 \cdot 3 = 15$,

oscillazioni $\tau = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{39}}{2}} \simeq 2$

$u_2 \to y$ : $(u_1 = u_3 = 0)$

$y = B(u_2 - y)$

$y = \frac{B}{1+B} u_2$

$$G(s) = \frac{B}{1+B} = \frac{\frac{10}{s(1+s)}}{1 + \frac{10}{s(1+s)}} = \frac{10}{s^2+s+10}$$

poli: $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{39}}{2}$ : asintoticamente stabile,

$T_R \simeq 5 \cdot 2 = 10$,

oscillazioni $\tau \simeq 2$

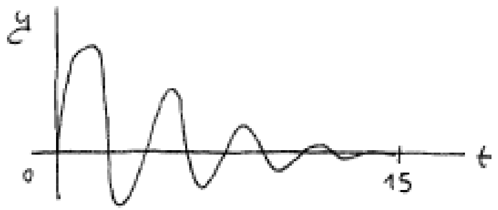
$u_3 \rightarrow y$ : $\quad y = C u_3 \quad C(s) = 2 \dfrac{(1-s)(1-2s)}{(1+s)(1+2s)(1+3s)}$
$(u_1 = u_2 = 0)$

poli : $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ : asintoticamente stabile
$T_R \simeq 5 \cdot 3 = 15$

b) risp. scalino di $F(s)$ :

$y_\infty = F(0) = 0$

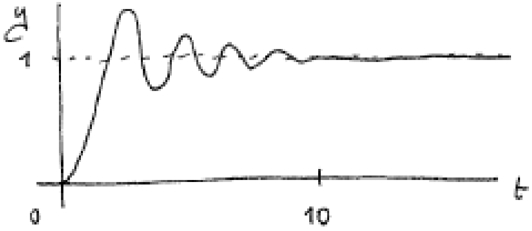
$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$




risp. scalino di $G(s)$ :

$y_\infty = G(0) = 1$

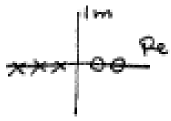
$(r=2)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y}(0) = 10 > 0 \end{cases}$



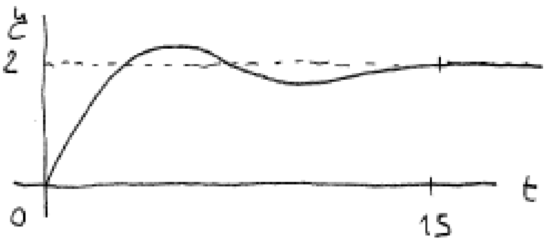

risp. scalino di $C(s)$

$y_\infty = C(0) = 2$

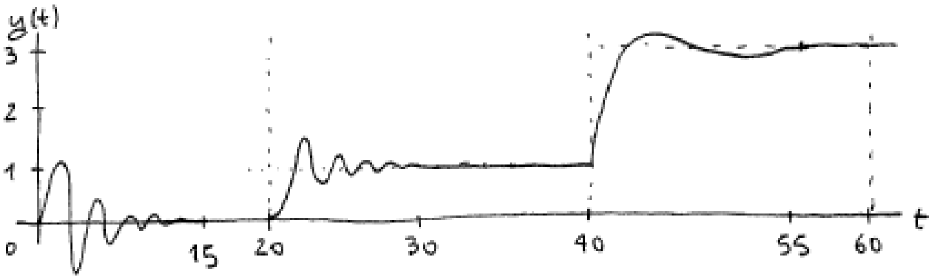
$(r=1)\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{4}{6} > 0 \end{cases}$




$m_s = 2$
$N = 2$



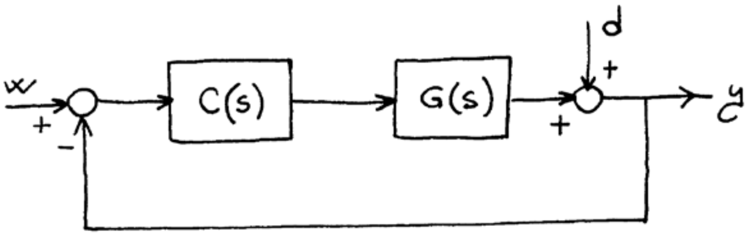

Andamento complessivo di $y(t)$ :



4) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui

$$C(s) = \frac{0.1}{s} \qquad G(s) = \frac{10}{s+1}$$

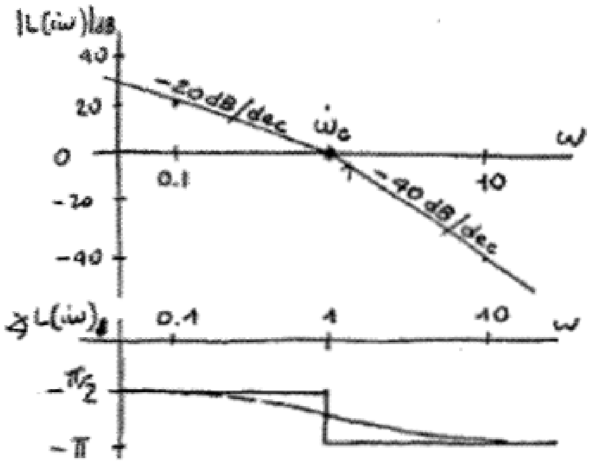
a) Discutere la stabilità del sistema di controllo, determinando il valore della pulsazione critica e del margine di fase.
b) Determinare (anche in modo approssimato) la banda passante ed il tempo di risposta del sistema di controllo.
c) Determinare l'errore a regime quando $w(t) = sca(t)$, $d(t) = 0.5sca(t) + 0.1\sin(0.1t)$.




---

**Soluzione** [se necessario proseguire sul retro]:

a) $L(s) = C(s)G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$




$\omega_c \cong 1$
$\varphi_c \simeq -135°$
$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| \simeq 45° > 0$

Il sistema di controllo è asintoticamente stabile.

b) $BP \simeq (0, \omega_c) = (0, 1)$

$T_{RISP} \simeq 5 \dfrac{1}{\omega_c} = 5$

c) Poiché la $L(s)$ contiene un integratore (cioè è di tipo $g=1$), riferimento e disturbo costanti danno luogo a errore a regime NULLO. Si tratta quindi di analizzare solo l'effetto di

$d(t) = 0.1 \sin(0.1t)$

$$H_{d\to e} = -\frac{1}{1+L} \qquad |H(i\omega)| = \frac{1}{|1+L(i\omega)|} \cong \begin{cases} 1 = 0dB, & \text{se } |L(i\omega)| \ll 1 \\ \dfrac{1}{|L(i\omega)|} = -|L(i\omega)|_{dB}, & \text{se } |L(i\omega)| \gg 1 \end{cases}$$

Quindi

$$e(t) \cong 0.1 \frac{1}{|L(i0.1)|} \sin(0.1t + \varphi) = 0.01 \sin(0.1t + \varphi)$$

5) Si fornisca la definizione di sistema stabilizzabile. Si precisi sotto quali condizioni un sistema è stabilizzabile.

6) A un sistema lineare a tempo discreto, esternamente stabile, viene applicato un ingresso $u(t)$ che in ogni istante è estratto casualmente nell'intervallo $[-1,+1]$. Si dica, sulla sola base di queste informazioni, quale affermazione è sicuramente vera:

[1] L'uscita del sistema è limitata per ogni $x(0)$.
[2] L'uscita del sistema è limitata se $x(0)=0$.
[3] L'uscita del sistema tende a 0 per ogni $x(0)$ qualunque sia il sistema.
[4] L'uscita del sistema è illimitata per qualche $x(0)$.

7) Dopo aver avviato Matlab, specificare la sequenza di comandi da digitare per visualizzare la risposta allo scalino del sistema

$$G(s)=\frac{10(1-10s)}{(1+s)^2}$$

**Risposte ai quesiti 5-6-7** [se necessario proseguire sul retro]:

5) $(A,b)$ è stabilizzabile se ammette una legge di controllo stabilizzante, cioè se esiste $k$ tale che $(A+bk)$ è asintoticamente stabile.

$(A,b)$ stabilizzabile se e solo se: i) è completamente raggiungibile, oppure ii) la parte non raggiungibile è asintoticamente stabile.

6)

La [2] è sicuramente vera: l'ingresso $u(t)$ è comunque limitato quindi, per definizione di stabilità esterna, $y(t)$ è limitata se $x(0)=0$.
(La [1] è vera solo se la parte NR, O è asint. stabile. La [4] solo se NR, O è instabile.)

7)

$$G(s)=\frac{10(1-10s)}{(1+s)^2}=\frac{-100s+10}{s^2+2s+1}\text{ , quindi :}$$

```
>> sis = tf([-100 10],[1 2 1])
>> step(sis)
```