



POLITECNICO
MILANO 1863

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 6/9/2019

COGNOME: _____ NOME: _____

MATRICOLA o CODICE PERSONA: _____

FIRMA: _____ Visto del docente: _____

6	6	6	6	3	3	2

Voto totale

32

ATTENZIONE !

- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) In un'azienda manifatturiera, la produzione è ripartita su un elevato numero di macchine tra loro uguali. Sono note le probabilità che una macchina incorra in un guasto nel corso di un anno, in relazione alla sua età.

età	da 0 a 1 anno	da 1 a 2 anni	da 2 a 3 anni	da 3 a 4 anni
Prob. guasto	0	0.1	0.2	0.3

In caso di guasto, la macchina viene eliminata poiché la riparazione non è conveniente. Ogni macchina viene comunque eliminata al compimento del quarto anno di attività, in quanto obsoleta.

- Descrivere l'evoluzione nel tempo dell'insieme delle macchine mediante un sistema dinamico a tempo discreto, in cui $u(t)$ indichi il numero di nuove macchine acquistate e $y(t)$ il totale di macchine in servizio.
- Studiare la stabilità del sistema, discutendo anche il tempo di risposta e l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.
- Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
- Si ipotizzi ora che l'attività di ciascuna macchina fruttu un ricavo annuo p e che il costo per l'acquisto di una nuova macchina sia c . Modificare il modello precedente, assumendo che l'azienda spenda ogni anno per l'acquisto di nuovi macchinari esattamente la frazione $0 < \alpha < 1$ del profitto ottenuto.
- Studiare, utilizzando un metodo formale (non basta la calcolatrice), la stabilità del sistema ottenuto al punto d), ponendo $c = p$ e $\alpha = 0.1$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $x_i(t)$, $i=1,2,3,4$: n° macchine in servizio da i anni all'istante t

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= (1-g_1)u(t) = u(t) \\x_2(t+1) &= (1-g_2)x_1(t) = 0.9x_1(t) \\x_3(t+1) &= (1-g_3)x_2(t) = 0.8x_2(t) \\x_4(t+1) &= (1-g_4)x_3(t) = 0.7x_3(t) \\&\quad \downarrow \text{prob. guasto}\end{aligned}$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t)$$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$ $\sigma(A) = \{0, 0, 0, 0\}$ $|\lambda_i| < 1 \forall i \Rightarrow$ ASINTOT. STABILE
sistema a memoria finita : $T_R \leq n=4$
 λ_i reali non negativi $\Rightarrow$ $\nexists$ oscillazioni.

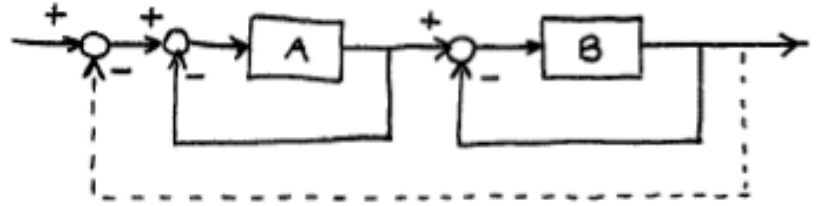
c) $\begin{cases} zX_1 = u \\ zX_2 = 0.9X_1 \\ zX_3 = 0.8X_2 \\ zX_4 = 0.7X_3 \end{cases} \Rightarrow Y = \left[\frac{1}{z} + \frac{0.9}{z^2} + \frac{0.9 \times 0.8}{z^3} + \frac{0.9 \times 0.8 \times 0.7}{z^4} \right] u$
 $G(z) = \frac{z^4 + 0.9z^3 + 0.72z^2 + 0.504z}{z^4}$

d) Cambia solo la 1ª equazione :

$$x_1(t+1) = (1-g_1) \alpha \frac{p}{c} (x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t))$$

e) $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$ A è una matrice NON NEGATIVA.
 $\lambda_0 = \text{aut. dominante e REALE } \geq 0$
 $0.4 \leq \lambda_0 \leq 0.9$
 $\downarrow$ min e max somma di riga
 $\therefore \lambda_0 < 1 \Rightarrow$ ASINT. STABILE

2) Si consideri il sistema a tempo continuo rappresentato in figura, in cui il blocco A è un integratore ed il blocco B è descritto dal modello I/O



$$\ddot{y}_B + 2\dot{y}_B + 11y_B = \dot{u}_B.$$

Si consideri dapprima il sistema SENZA il collegamento tratteggiato:

- Verificare la asintotica stabilità del sistema.
- Determinare il tempo di risposta e discutere l'eventuale presenza di oscillazioni nel movimento libero.

Si consideri ora il sistema CON il collegamento tratteggiato:

- Determinare la funzione di trasferimento complessiva del sistema, esprimendola in funzione delle funzioni di trasferimento G_A e G_B dei blocchi A e B.
- Discutere la stabilità del sistema.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

- a) Indicando con R_A (risp. R_B) la retroazione unitaria di A (risp. B), il sistema è formato dalla cascata di R_A e R_B . Quindi sarà asintoticamente stabile se e solo se lo sono R_A e R_B .

$$R_A: G_{RA} = \frac{G_A}{1+G_A} = \frac{1/s}{1+1/s} = \frac{1}{1+s} \quad s = -1 : \text{asint. stabile}$$

$$R_B: G_{RB} = \frac{G_B}{1+G_B} = \left(\frac{s}{s^2+2s+11} \right) / \left(1 + \frac{s}{s^2+2s+11} \right) = \frac{s}{s^2+3s+11}$$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{9-44}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{35}}{2}$$

asint. stabile

Il sistema è quindi asintoticamente stabile.

- b) $\exists$ poli complessi $\Rightarrow \exists$ oscillazioni

$$\lambda_{\text{dom}} = -1 : T_D = 1 \quad T_R \approx 5T_D = 5$$

$$c) G = \frac{G_{RA} G_{RB}}{1 + G_{RA} G_{RB}} = \frac{\frac{1}{1+s} \cdot \frac{s}{s^2+3s+11}}{1 + \frac{1}{1+s} \cdot \frac{s}{s^2+3s+11}} = \frac{G_A G_B}{1 + G_A + G_B + 2G_A G_B}$$

$$d) G = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{s^2+2s+11}}{1 + \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+2s+11} + \frac{2}{s^2+2s+11}} ; \text{svolgendo i calcoli, otteniamo}$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \text{ con}$$

$$D(s) = s^3 + 4s^2 + 15s + 11$$

$$\text{Hurwitz: } H = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 11 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} 4 > 0 \quad \text{OK} \\ 4 \cdot 15 - 1 \cdot 11 > 0 \quad \text{OK} \\ 11(4 \cdot 15 - 1 \cdot 11) > 0 \quad \text{OK} \end{array}$$

Anche questo sistema è asintoticamente stabile.

3) Un dispositivo elettronico è sottoposto a prove per ricavarne la funzione di trasferimento. Applicando ingressi sinusoidali di ampiezza unitaria ("prova in frequenza") ed aventi varie frequenze ω (cioè $v_{in}(t) = \sin(\omega t)$), si sono rilevate l'ampiezza e lo sfasamento dell'uscita a transitorio esaurito ($v_{out}(t) = V \sin(\omega t + \varphi)$):

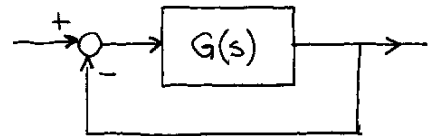
ω	0.01	1	100
V	100	10	1
φ	-90°	0°	-90°

Applicando invece un ingresso costante $v_{in}(t) = \bar{v} > 0$ ("prova statica"), l'uscita non tende ad un valore di regime ma cresce indefinitamente.

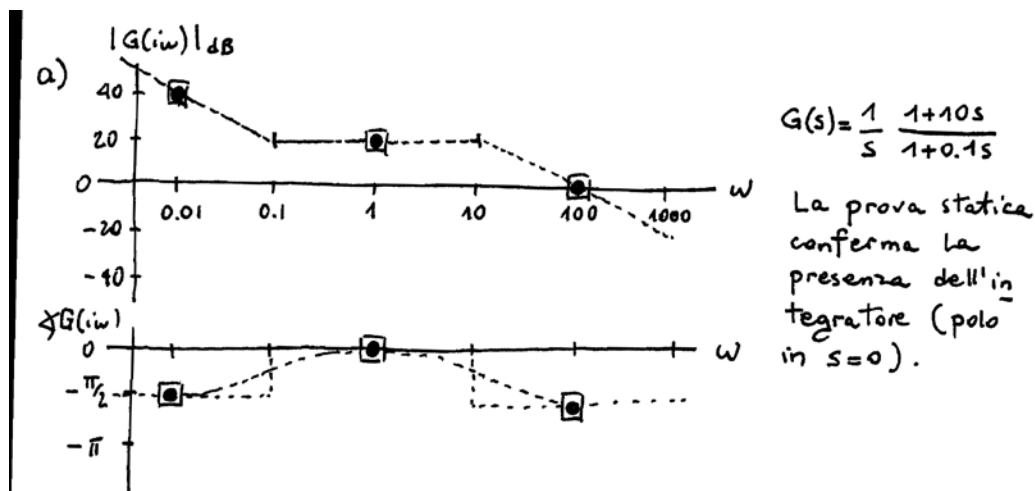
a) Determinare una funzione di trasferimento $G(s)$ tra tensione d'ingresso e d'uscita compatibile con i risultati delle prove.

b) Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta all'impulso di $G(s)$.

c) Discutere, mediante il criterio di Bode, la stabilità del sistema in figura.



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



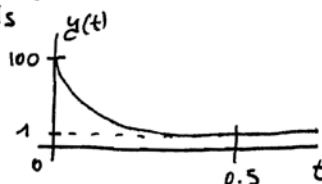
b) La risposta all'impulso di $G(s)$ coincide con la risposta allo scalino di $\tilde{G}(s) = \frac{1+10s}{1+0.1s}$ (esternamente stabile)

$$y_{\infty} = \tilde{G}(0) = 1$$

$$T_R \approx 5T_D = 0.5$$

$$r=0 \quad y(0) = \frac{10}{0.1} = 100$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left(s \frac{1}{s} \tilde{G}(s) - 100 \right) = -\frac{99}{0.1} < 0$$



c) Condizioni di applicabilità: $G(s)$ non ha poli con $\text{Re}(p) > 0$, o.k.
 $\exists! \omega : |G(j\omega)| = 1$, o.k.

$$\omega_c = 100$$

$$\varphi_c = -\pi/2$$

$$\Rightarrow \varphi_m = \frac{\pi}{2} > 0$$

Il sistema in figura è asintoticamente stabile.

4) Si consideri il sistema di controllo in figura, in cui $C(s) = \mu$ e

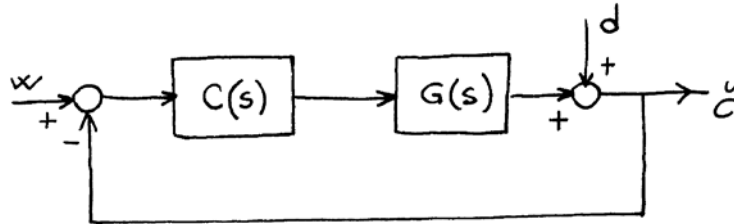
$$G(s) = \frac{10(1-s)}{s(1+0.1s)}$$

a) Determinare un valore del coefficiente $\mu > 0$ che renda il sistema di controllo asintoticamente stabile, specificando i valori ottenuti per il margine di fase, la pulsazione critica ed il tempo di risposta del sistema di controllo.

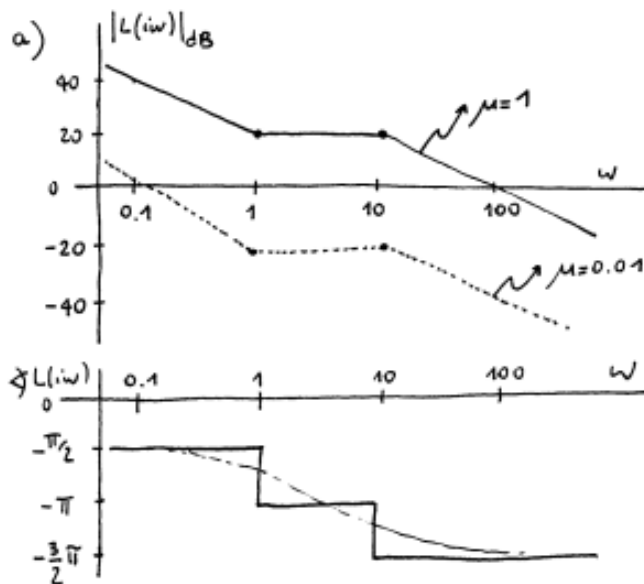
Utilizzando il valore di μ determinato al punto precedente:

b) Determinare l'errore a transitorio esaurito dovuto a un riferimento w costante.

c) Determinare l'errore a transitorio esaurito dovuto a un disturbo $d(t) = D \sin(100t)$.



Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:



$$L(s) = \mu G(s)$$

Scegliendo

$$\mu = 0.01 \text{ si}$$

ottiene:

$$\omega_c = 0.1$$

$$\varphi_c \approx -\pi/2$$

$$\rho_m = \pi - |\varphi_c| \approx \pi/2 > 0$$

$$T_R \approx \frac{5}{\omega_c} = 50$$

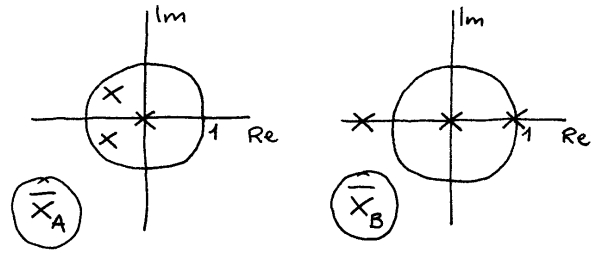
b) e_∞ dovuto a w costante è nullo poiché $L(s)$ è di tipo 1 (possiede un polo nell'origine).

$$c) e_\infty^d = |H(i100)| \cdot D \cdot \sin(100t + \angle H(i100)) \quad \text{dove } H(s) = -\frac{1}{1+L(s)}$$

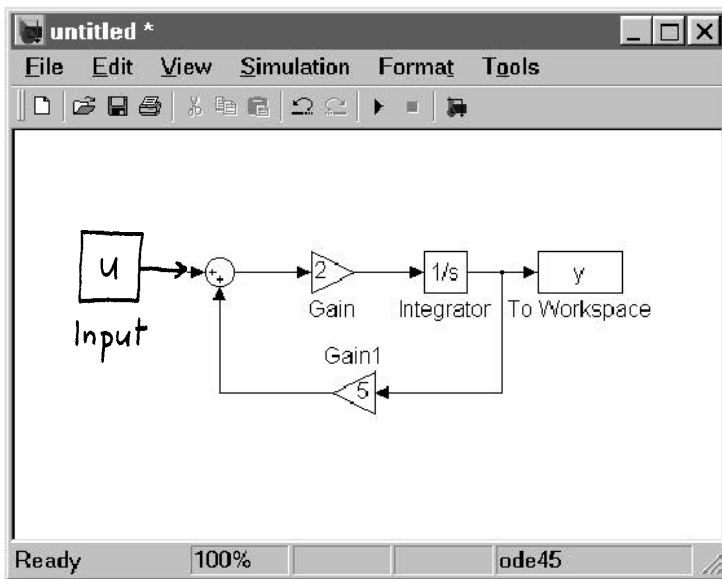
$$\approx 1 \cdot D \sin(100t + \angle H(i100))$$

5) Discutere il concetto di guadagno in un sistema lineare (A, b, c) (o $G(s)$) a tempo continuo: definizione, calcolo dal modello interno ed esterno, casi critici.

6) Un sistema $x(t+1) = f(x(t))$ di ordine 3 possiede 2 stati di equilibrio. Il quadro degli autovalori del sistema linearizzato, nell'intorno dei 2 equilibri, è riportato in figura. Discutere la stabilità degli stati di equilibrio.



7) Determinare il modello ingresso/uscita (equazione differenziale o funzione di trasferimento) corrispondente allo schema Simulink in figura.



Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire sul retro]:

5)

Il guadagno è il rapporto tra uscita e ingresso all'equilibrio:

$$\mu = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

È calcolabile come $\mu = -cA^{-1}b$, tranne quando A è singolare (in tal caso μ non è definito). Nota la $G(s)$, μ è invece calcolabile come $\mu = G(0)$, tranne quando $s=0$ è polo di $G(s)$ (in tal caso μ non è definito).

6)

$$|\lambda_i| < 1 \quad \forall i=1,2,3$$



$\bar{x}_A$ è asintoticamente stabile

$$\exists \lambda_i \text{ con } |\lambda_i| > 1$$



$\bar{x}_B$ è instabile

7)

$$y = \frac{2}{s} (5y + u)$$

$$sy - 10y = 2u$$

$$\left\{ \dot{y} - 10y = 2u \right\}$$

$$\overset{\text{oppre}}{(s-10)}y = 2u$$

$$\left\{ G(s) = \frac{2}{s-10} \right\}$$