



**POLITECNICO
MILANO 1863**

FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Corso di laurea in Ingegneria Matematica – Prof. C. Piccardi
Appello del 9/7/2019

COGNOME: _____ NOME: _____

MATRICOLA o CODICE PERSONA: _____

FIRMA: _____ Visto del docente: _____

6	6	6	6	3	3	2

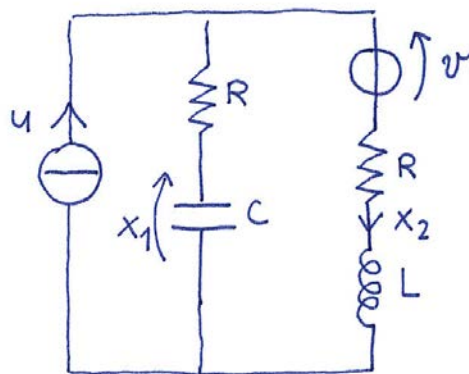
Voto totale

32

ATTENZIONE !

- Non è consentito consultare libri, appunti, ecc.
- Le risposte devono essere giustificate.
- Le soluzioni devono essere riportate solo sui fogli allegati.
- Sono valutati anche l'ordine e la chiarezza espositiva.

1) Si consideri la rete elettrica in figura (in cui $R, L, C > 0$), dove $u(t)$ è un ingresso prodotto da un generatore di corrente e $v(t)$ un ingresso prodotto da un generatore di tensione.



a) Si ponga dapprima $v = 0$ (equivalente a sostituire il generatore v con un filo). Scrivere le equazioni di stato del sistema con ingresso u , studiarne la stabilità e determinare gli equilibri in funzione di u .

b) Si ponga ora $u = 0$ (equivalente a sostituire il generatore u con un circuito aperto). Scrivere le equazioni di stato del sistema con ingresso v , studiarne la stabilità e determinare gli equilibri in funzione di v .

~~c) Si ponga ora (e non prima) $L = 1, R = 3, C = 1/13$ e si supponga il sistema inizialmente a riposo ($x(0) = 0$). Disegnare nel piano di stato la traiettoria del sistema nell'intervallo $0 \leq t \leq 15$, assumendo che:~~

~~$$\begin{cases} u = 1, v = 0, & \text{per } 0 \leq t < 5 \\ u = 0, v = 1, & \text{per } 5 \leq t < 10 \\ u = 0, v = 0, & \text{per } 10 \leq t < 15 \end{cases}$$~~

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) $\dot{x}_1 = \frac{1}{C} (u - x_2)$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} (-Rx_2 + x_1 + R(u - x_2))$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{R}{L} \end{vmatrix}$$

$$\text{tr} A = -\frac{2R}{L} < 0, \det A = \frac{1}{LC} > 0$$

$\Rightarrow A$ asint. stabile
 $\forall R, L, C > 0$

equilibri: $\begin{cases} 0 = \bar{u} - \bar{x}_2 \\ 0 = -2R\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + R\bar{u} \end{cases} \Rightarrow \bar{x}' = \begin{vmatrix} R \\ 1 \end{vmatrix} \bar{u}$

b) $\dot{x}_1 = \frac{1}{C} \cdot (-x_2)$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} \cdot (-v + x_1 - 2Rx_2)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L} \end{vmatrix}$$

A come sopra, asint. stab.

equilibri: $\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -v + \bar{x}_1 - 2R\bar{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \bar{v}$

$$c) \Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

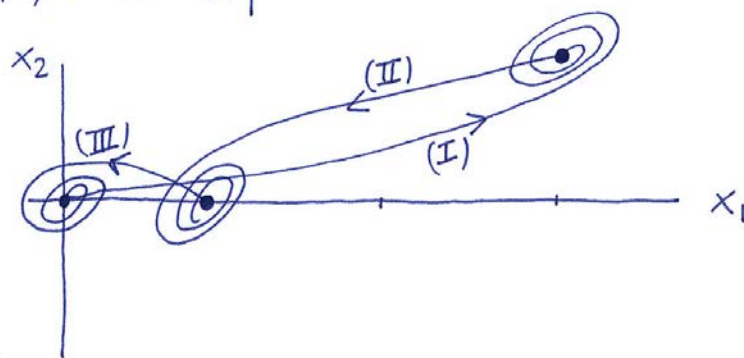
$$\lambda = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm i2$$

Fuoco STABILE, $T_R \approx \frac{5}{3}$:
in 5 unità di tempo raggiunge
l'equilibrio.

$$(I) t \in [0, 5) : x(t) \rightarrow \bar{x}' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(II) t \in [5, 10) : x(t) \rightarrow \bar{x}'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

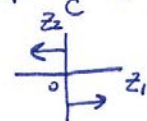
$$(III) t \in [10, 15) : x(t) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$z = x - \bar{x}$$

$$\dot{z} = Az$$

$$\dot{z}_1 = -\frac{1}{C} z_2$$



2) Si consideri il seguente sistema non lineare avente variabili di stato (x, y) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 - 2y \\ \dot{y} &= 2x - y\end{aligned}$$

a) Determinare gli stati di equilibrio e studiarne la stabilità mediante il metodo di linearizzazione.

~~b) Tracciare il quadro locale delle traiettorie nell'intorno degli equilibri.~~

~~c) Aiutandosi con il tracciamento delle isocline, proporre un quadro globale delle traiettorie compatibile con tutte le informazioni disponibili.~~

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

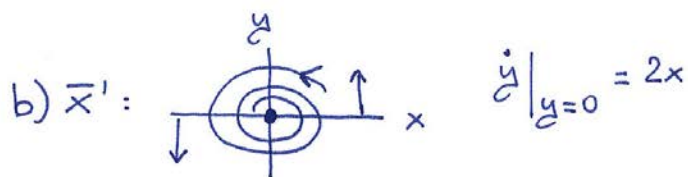
$$a) \begin{cases} 0 = -x + x^2 - 2y \\ 0 = 2x - y \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-5) = 0 \\ y = 2x \end{cases} \quad \bar{x}' = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \bar{x}'' = \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} -1+2x & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad J' = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \text{tr } J' = -2 < 0 \\ \det J' = 5 > 0 \end{cases} \quad \bar{x}' \text{ e } \bar{x}'' \text{ ASINTOT. STABILE}$$

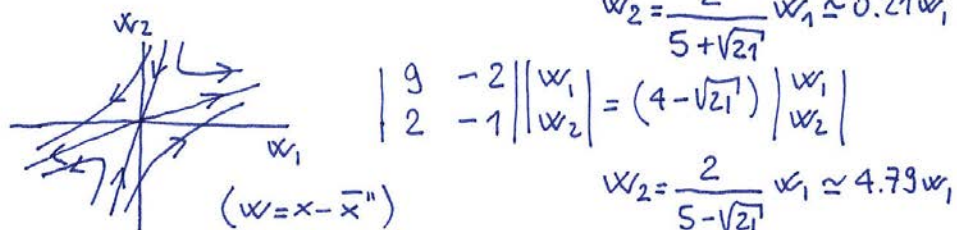
$$\Delta_{J'}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \\ \lambda = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm i2 \\ \text{FUOCO STABILE}$$

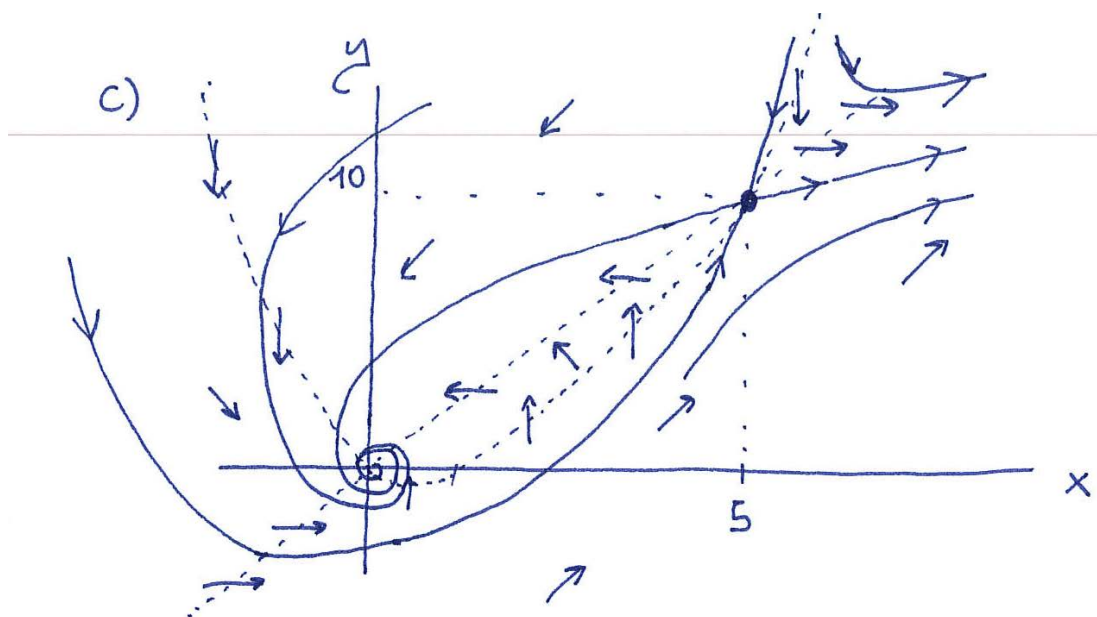
$$J'' = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \text{tr } J'' = 8 > 0 \\ \det J'' = -5 < 0 \end{cases} \quad \bar{x}'' \text{ e } \bar{x}''' \text{ INSTABILE}$$

$$\Delta_{J''}(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda - 5 = 0 \\ \lambda = 4 \pm \sqrt{16+5} = 4 \pm \sqrt{21} \\ \text{SELLA}$$

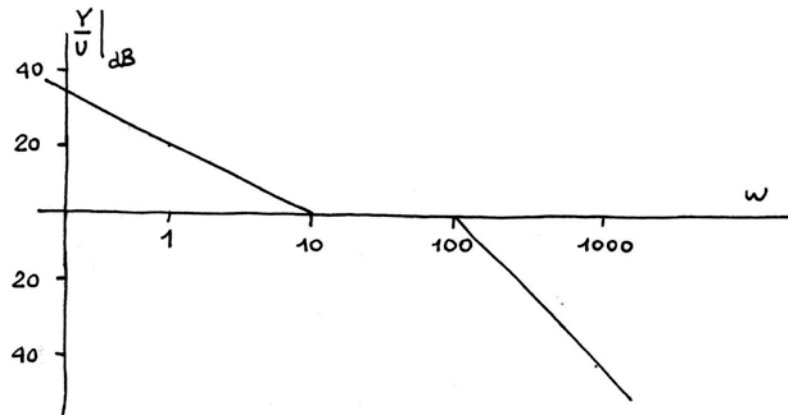


$$\bar{x}'' : J'' \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = (4 + \sqrt{21}) \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} \\ w_2 = \frac{2}{5 + \sqrt{21}} w_1 \approx 0.21 w_1$$





3) Il diagramma di Bode in figura è stato ricavato mediante una serie di esperimenti su un sistema lineare, consistenti nell'applicare ingressi $u(t) = U \sin(\omega t)$ a diversa frequenza e nel rilevare, a transitorio esaurito, le caratteristiche dell'uscita $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$. Si è rilevato, inoltre, che lo sfasamento $\varphi \rightarrow -2\pi$ quando $\omega \rightarrow \infty$.



- Determinare una funzione di trasferimento compatibile con i risultati degli esperimenti.
- Determinare qualitativamente la risposta all'impulso del sistema avente la funzione di trasferimento determinata al punto a).
- Determinare analiticamente la medesima risposta richiesta al punto b).

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

a) Le f.d.t. compatibili con il diagramma del modulo sono le seguenti:
 $G(s) = \pm \frac{10}{s} \frac{(1 \pm 0.1s)}{(1 + 0.01s)^2}$; di queste 4 f.d.t. (ottenute variando i segni $\pm$), solo 2 rispettano il requisito $\angle G(i\omega) \rightarrow -2\pi$ per $\omega \rightarrow \infty$. Tra queste scegliamo:

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{(1 - 0.1s)}{(1 + 0.01s)^2}$$

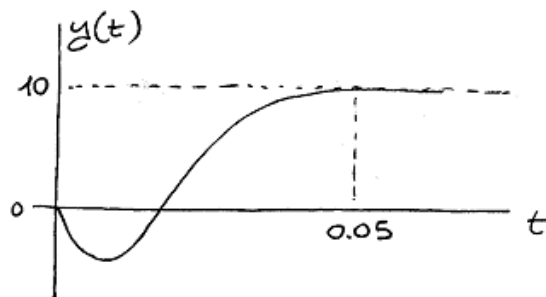
b) $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{10}{s} \frac{(1 - 0.1s)}{(1 + 0.01s)^2} \cdot 1$ tr. di Laplace dell'impulso

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 10$$

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 Y(s) = -10^4$$

$$T_{RISP} \approx 5 \cdot 0.01 = 0.05, \text{ non vi sono oscillazioni}$$



In alternativa, y può essere ottenuta come risposta allo SCALINO di $\tilde{G}(s) = 10 \frac{1 - 0.1s}{(1 + 0.01s)^2}$. Essendovi

uno zero superiore, è confermata la presenza di un solo estremo nella risposta.

$$c) Y(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1-0.1s}{(1+0.01s)^2} = -\frac{10^4}{s} \frac{s-10}{(s+100)^2} =$$

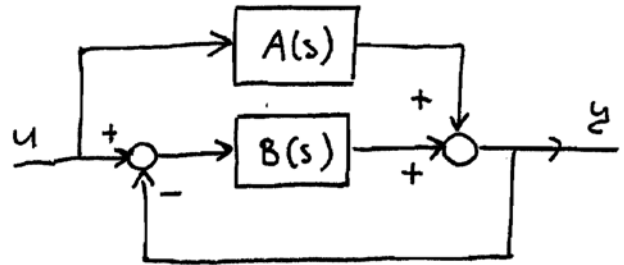
$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{(s+100)^2} = \left[\begin{array}{l} \text{imponendo l'identità} \\ \text{dei numeratori} \end{array} \right]$$

$$= \frac{10}{s} - \frac{10}{s+100} - \frac{11'000}{(s+100)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 10 - 10e^{-100t} - 11000te^{-100t}$$

4) Si consideri il sistema in figura, in cui

$$A(s) = \frac{1}{s}, \quad B(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$



- Determinare la funzione di trasferimento complessiva $G(s)$ tra u e y e discuterne la stabilità.
- Determinare qualitativamente e rappresentare graficamente la risposta allo scalino di $G(s)$.
- Determinare l'uscita $y(t)$ a transitorio esaurito se $u(t) = -5 + 2\sin(3t)$.

Soluzione [se necessario proseguire sul retro]:

$$\left. \begin{aligned} y &= Au + B(u-y) \\ y(1+B) &= (A+B)u \end{aligned} \right\} G(s) = \frac{A+B}{1+B} = \frac{\frac{1}{s} + \frac{10}{s(s+2)}}{1 + \frac{10}{s(s+2)}} = \frac{s+12}{s^2+2s+10}$$

poli: $s = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm i3$ $\text{Re}(p_i) < 0 \forall i \Rightarrow G$ esternam. stabile.

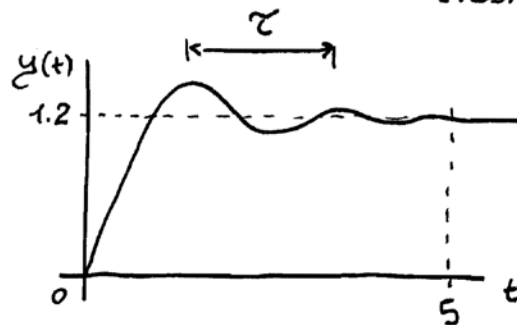
b) $y_\infty = G(0) = \frac{12}{10} = 1.2$

$T_R \approx 5T_D = 5$

$r=1: y(0)=0$

$\dot{y}(0)=1 > 0$

oscillazioni: periodo $\tau \approx \frac{2\pi}{3}$



$$\begin{aligned} c) y(t) &= -5G(0) + 2|G(i3)| \sin(3t + \angle G(i3)) \\ &= -6 + 2 \underbrace{\left| \frac{i3+12}{(i3)^2+2i3+10} \right|}_{\approx 2.03} \sin(3t + \angle G(i3)) \end{aligned}$$

5) Si consideri il sistema $\dot{x} = Ax$ di ordine $n = 2$. Sia della traccia che del determinante di A si conosce solo il segno (cioè si sa che il valore è positivo, negativo, o nullo): si discuta motivatamente quali conclusioni si possono trarre sulla stabilità del sistema (*suggerimento: organizzare i risultati in una tabella 3x3*).

6) Stabilità esterna: definizione e condizioni necessarie e/o sufficienti per sistemi a tempo continuo e discreto.

7) In ambiente Matlab, specificare quale comando può essere utilizzato per calcolare il margine di fase di un sistema di controllo, precisando la sintassi di utilizzo.

Risposte ai quesiti 5-6-7 [se necessario proseguire sul retro]:

5)

det A				
tr A		> 0	< 0	= 0
	> 0	$\begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array}$ INST.	$\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array}$ INST.	$\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array}$ INST.
	< 0	$\begin{array}{c} \times \times \\ \times \\ \times \end{array}$ AS. ST.	$\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array}$ INST.	$\begin{array}{c} \times \times \\ \times \end{array}$ SEML. ST.
	= 0	$\begin{array}{c} * \\ * \end{array}$ SEML. ST.	$\begin{array}{c} \times \\ \times \end{array}$ INST.	$\begin{array}{c} * \\ * \end{array}$ SEML. ST. INST. (DEB.)

6)

Il sistema Σ è esternamente stabile se il movimento forzato ($x(0)=0$) dell'uscita è limitato per ogni ingresso limitato.

Σ esternamente stabile $\iff$ $\text{Re}(p_i) < 0 \quad \forall i, \text{ t. continuo}$
 $|p_i| < 1 \quad \forall i, \text{ t. discreto}$
 dove $p_i, i=1,2,\dots,n$ sono i poli della funzione di trasferimento di Σ .

7)

Calcola i margini di fase e di guadagno di un sistema di controllo. Un possibile uso:

$$[G_m, P_m, W_{cg}, W_{cp}] = \text{margin}(\text{sys})$$

L'argomento sys è la f.d.t. d'anello. Vengono restituiti: margine di guadagno (G_m), di fase (P_m) e le rispettive frequenze critiche (W_{cg}, W_{cp}).